Zbornik radova Fakulteta tehničkih nauka, Novi Sad

UDK: 517.98
DOI: https://doi.org/10.24867/10JV02Markovic

NEKE KLASE FIBONAČIJEVIH BROJEVA

SOME CLASSES OF FIBONACCI NUMBERS

Miloš Marković, Nebojša Ralević, *Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad*

Oblast – MATEMATIKA U TEHNICI

Kratak sadržaj – *Predmet istraživanja rada su Fibonačijevi brojevi i njima slični kao što su: Lukasovi brojevi, Gibonačijevi brojevi i Tribonačijevi brojevi. Akcenat je stavljen na njihove osobine, kao i na njihove međusobne odnose, pre svega odnose Fibonačijevih i Lukasovih brojeva. Takođe su, u radu izložene neke zanimljivosti Lukasovih i Fibonačijevih brojeva i njihova prisutnost u prirodi. Dato je i uopštenje tih brojeva tzv. k-nači brojevi.*

Ključne reči: *Fibonačijevi brojevi, Lukasovi brojevi, Gibonačijevi brojevi, Bineova formula*

Abstract - *The subject of research of this paper are Fibonacci numbers and similar ones such as: Lucas numbers, Gibonacci numbers and Tribonacci numbers. Emphasis is placed on their properties, as well as on their mutual relations, primarily the relations between Fibonacci and Lucas numbers. Also, this paper presents some interesting facts about Lucas and Fibonacci numbers and their presence in nature.*

Key words: *Fibonacci numbers, Lucas numbers, Gibonacci numbers, Binet's formula*

1. UVOD

Fibonačijevi, Lukasovi, Gibonačijevi, Tribonačijevi brojevi, odnosno nizovi kao i njihova uopštenja predstavljaju jedne od najpoznatijih brojeva, odnosno nizova. U drugoj sekciji je predstavljena skraćena biografija srednjovekovnog italijanskog matematičara Fibonačija. U trećoj sekciji je predstavljen Problem zečeva formulisan od strane Fibonačija, definicija Fibonačijevih brojeva, kao i zanimljivosti gde se oni pominju vezano za pojave u prirodi. Definicija Lukasovih brojeva je data u četvrtoj sekciji, dok su u petoj navedene neke od mnogobrojnih osobina Fibonačijevih i Lukasovih brojeva, kao i veze između njih (videti [4], [8] i [11]). Definicija Gibonačijevih brojeva i neke njihove osobine su predstavljeni u sledećoj sekciji. U sedmoj sekciji su navedeni rezultati kako se Fibonačijevi i Lukasovi brojevi mogu izračunati, dok se u osmoj sekciji nalaze osobine vezane za deljivost tih brojeva. U sekcijama 9 i 10 su definisani Tribonačijevi i *K*-nači brojevi. Poslednja sekcija je Zaključak rada iza koje sledi korišćena literatura.

NAPOMENA:
Ovaj rad proistekao je iz master rada čiji mentor je bio dr Nebojša Ralević, red. prof.

2. LEONARDO BONAČI

Leonardo Bonači je italijanski matematičar srednjeg veka. Rođen je 1170. godine u Pizi, a umro je 1250. godine. Poznat je pod imenom Fibonači. Njegovo prvo delo je "Knjiga o računu" iz 1202. godine, u kojoj govori o arapskom brojevnom sistemu. Ostala dela su još:

1) ”Praktična geometrija” (1220. godina)

2) ”Cvet” (1225. godina)

3) ”Knjiga o kvadratnim brojevima” (1225. godina)

Fibonači je stekao obrazovanje u trgovačkoj koloniji Buđiji (današnji Alžir), u kojoj je njegov otac bio upravnik. Pre svega je učio veštine računanja i upoznao se sa arapskim brojevnim sistemom. Nakon toga se vratio u Italiju. Može se reći, da je zahvaljujući Fibonačiju, uveden arapski brojevni sistem u Evropi. Fibonači je najpoznatiji po svom nizu. Nažalost, njegov rad iz teorije brojeva je ostao nepoznat.

Veruje se da je umro u Pizi, gde se i danas nalazi spomenik posvećen njemu.

3. FIBONAČIJEVI BROJEVI

Fibonači je u svojoj „Knjizi o računu” obradio dosta nekih elementarnih problema, a jedan od najpoznatijih koji se nalazi u knjizi jeste ”Problem zečeva” u kom se polazi od pretpostavke da na početku postoje jedan mužjak i jedna ženka zeca i da zečevi dostižu polnu zrelost nakon mesec dana, tj. ulaze u fazu razmnožavanja, i nose ih još mesec dana. Pitamo se, koliko ćemo imati zečeva posle određenog vremena?

Tabela 1: *Rast populacije zečeva za 6 meseci*

Mesec	Broj parova odraslih	Broj parova beba	Ukupan broj parova
Januar	0	1	1
Februar	1	0	1
Mart	1	1	2
April	2	1	3
Maj	3	2	5
Jun	5	3	8
Jul	8	5	13

Brojevi iz poslednje kolone su zapravo Fibonačijevi brojevi, a niz 1, 1, 2, 3, 5, 8… se naziva Fibonačijev niz.

3.1. Rekurzivna definicija

Fibonačijevi brojevi F_n, $n \in N$ se definišu (vidi npr. [8]) na sledeći način:

$F_1 = F_2 = 1 \leftarrow$ početni uslov
$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \leftarrow$ rekurentna veza, $n \geq 3$.
Ne zna se da li je Fibonači došao do ove rekurentne veze. Postoje spisi koji govore u prilog tome, ali i spisi koji to opovrgavaju.

3.2 Fibonačijevi brojevi u prirodi

Fibonačijevi brojevi su prisutni svuda u našem okruženju.
Primećeno je da je prečnik Zemlje proizvod 2 Fibonačijeva broja. Ako merimo prečnik u miljama onda je to proizvod brojeva 55 i 144, a ako merimo u kilometrima onda je to proizvod brojeva 89 i 144, što je približno tačnom prečniku.
Broj latica mnogih biljaka je zapravo Fibonačijev broj. Ljiljan i iris imaju 3 latice, divlja ruža 5 latica, bela rada i neven 13 latica….
Biljka u kojoj se na najfascinantniji način ogledaju Fibonačijevi brojevi je suncokret. Seme cveta suncokreta čvrsto je zbijeno u spirale, koje potiču iz središta glave prema spoljašnjoj ivici. Spirale se pružaju ili u smeru kazaljke na satu ili u suprotnom smeru od smera kazaljke. Broj spirala je uglavnom neki Fibonačijev broj i to, 34 u jednom smeru i 55 u drugom. Takođe postoje i veći suncokreti sa 55 i 89 spirala.

4. LUKASOVI BROJEVI

Lukasovi brojevi L_n, $n \in N$ se definišu (vidi [8]) na sledeći način:
$L_1 = 1$, $L_2 = 3 \leftarrow$ početni uslovi
$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \leftarrow$ rekurentna veza, $n \geq 3$.
Brojevi 1, 3, 4, 7, 11… čine Lukasov niz. Ovaj niz je dobio ime po engleskom matematičaru Edvardu Lukasu, i to nakon njegove smrti.
Svaki Lukasov broj se može predstaviti preko Fibonačijevih brojeva:
$L_n = F_{n+1} + F_{n-1},\ n \in N$.

5. OSOBINE FIBONAČIJEVOG I LUKASOVOG NIZA

5.1. Zanimljivi Lukasovi i Fibonačijevi brojevi

Prva zanimljiva osobina je da među Fibonačijevim i Lukasovim brojevima nema potpunih kvadrata, sem izuzetaka: 1 i 144 su Fibonačijevi brojevi koji su potpuni kvadrati, a 1 i 4 su jedini Lukasovi potpuni kvadrati.

Jedan od najprisutnijih Fibonačijevih brojeva je broj **89**. Broj 89 se javlja u zapisu mnogih razlomaka, i to uvek u sredini zapisa.

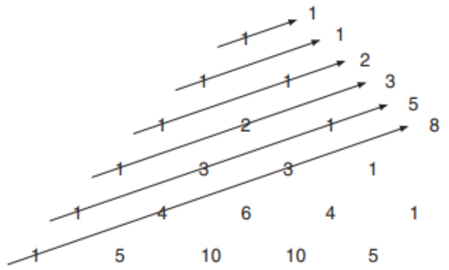
$$\frac{1}{89} = 0\ldots.(89)\ldots$$

$$\frac{1}{29} = 0.0344827586206(89)6551724137931$$

To je jedanaesti Fibonačijev broj po redu, 11 je peti Lukasov broj po redu. Spajanjem ova dva broja dobijamo broj 1189. Zanimljivo je da u Bibliji imamo tačno 1189 poglavlja, od čega se 89 nalazi u 4 jevanđelja.
Posebno zanimljivi su Fibonačijevi i Lukasovi prosti brojevi. Pretpostavlja se da ih ima beskonačno mnogo iako ne postoji dokaz za tu tvrdnju. Najveći poznat prost Fibonačijev broj je F_{104911} koji ima 21925 cifara, a najveći poznat Lukasov prost broj je L_{56003} sa 11704 cifre.

5.2. Fibonačijevi i Lukasovi brojevi u Paskalovom trouglu

Paskalov trougao je zapravo beskonačan niz brojeva, u obliku trougla, a elementi tog niza su binomni koeficijenti $\binom{n}{k}$, za $0 \leq k \leq n$.
Kada bismo sabrali brojeve iz Paskalovog trougla po dijagonali kao na slici 1 dobili bismo da te sume predstavljaju Fibonačijeve brojeve.



Slika 1. *Veza Paskalovog trougla i Fibonačijevih brojeva*

Svaki Fibonačijev i Lukasov broj se može izraziti preko binomnih koeficijenata.
$F_n = \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n-j-1}{j},\ n \geq 1.$
$L_n = \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \frac{n}{n-j} \binom{n-j}{j},\ n \geq 1.$

5.3. Neki bitniji identiteti

U ovom delu ćemo navesti neke najbitnije identitete.Jedna od najpoznatijih formula za Fibonačijeve brojeve je Kasinsova formula
$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n,\ n \geq 1$.
Pokazaćemo i kako se računa broj cifara u Lukasovim i Fibonačijevim brojevima.
Bitnu ulogu u određivanju broja cifara u Lukasovim i Fibonačijevim brojevima igraju Bineove formule.
$F_n = \frac{\alpha_1^n - \alpha_2^n}{\alpha_1 - \alpha_2}$.
$L_n = \alpha_1^n + \alpha_2^n$.
gde su α_1 i α_2 rešenja kvadratne jednačine $x^2 - x - 1 = 0$.
Broj cifara u Lukasovim i Fibonačijevim brojevima računamo po odgovarajućim formulama.

a) Broj cifara u F_n je
$\left\lceil n \cdot \left(\log\left(1+\sqrt{5}\right) - \log 2\right) - \frac{1}{2}\log 5 \right\rceil,\ n \in N.$
b) Broj cifara u L_n je
$\left\lceil n \cdot \left(\log\left(1+\sqrt{5}\right) - \log 2\right) \right\rceil,\ n \in N.$

Primer 1. Broj cifara broja L_{50}
$L_{50} = \left\lceil 50 \cdot \left(\log\left(1+\sqrt{5}\right) - log 2\right) \right\rceil = \lceil 50 \cdot 0.209 \rceil = 11$
Dobili smo da L_{50} ima 11 cifara što je tačno jer je
$L_{50} = 28143753123$.

Jedni od najbitnijih identiteta koji se spominju su Katalanovi identiteti:
$F_{n+k}F_{n-k} - F_n^2 = (-1)^{n+k+1}F_k^2,\ n \geq k.$
$L_{n+k}L_{n-k} - L_n^2 = 5(-1)^{n+k}F_k^2,\ n \geq k.$
Na osnovu njega slede i Gelin – Cezarovi identiteti:
$F_{n+2}F_{n+1}F_{n-1}F_{n-2} - F_n^4 = -1.$
$L_{n+2}L_{n+1}L_{n-1}L_{n-2} - L_n^4 = -25.$
Jedna od novijih teorema koja važi za obe vrste brojeva jeste Melamova teorema, koja nosi naziv po australijskom

matematičaru R.S. Melham-u, koji ju je ustanovio 2003. godine.

$F_{n+6}F_{n+2}F_{n+1} - F_{n+3}^3 = (-1)^n F_n$.

$L_{n+6}L_{n+2}L_{n+1} - L_{n+3}^3 = 5(-1)^n L_n$.

Rezultati u ovom poglavlju su preuzeti iz [4] i [8].

6. GIBONAČIJEVI BROJEVI

U ovoj glavi govorimo o trećoj klasi Fibonačijevih brojeva, Gibonačijevim brojevima. Gibonačijev n-ti broj se definiše pomoću sledećih početnih uslova i poznate rekurentne veze.

$G_1 = a$, $G_2 = b$, → početni uslovi

$G_n = G_{n-1} + G_{n-2}$ → rekurentna veza, $n \geq 3$

Svaki Gibonačijev broj možemo predstaviti preko Fibonačijevih brojeva, na sledeći način:

$G_n = aF_{n-2} + bF_{n-1},\ n \geq 3$

Kao što postoji Bineova formula za Fibonačijeve i Lukasove brojeve, tako postoji i za Gibonačijeve.

$G_n = \frac{c\alpha_1^n - d\alpha_2^n}{\alpha_1 - \alpha_2}$,

pri čemu je $c = a + (a - b)\alpha_2$ i $d = a + (a - b)\alpha_1$

Za ove brojeve važe:

Kasinsova formula

$G_{n+1}G_{n-1} - G_n^2 = (a^2 + ab - b^2)(-1)^n$.

Katalanov identitet:

$G_{n+k}G_{n-k} - G_n^2 = (a^2 + ab - b^2)(-1)^{n+k+1}F_k^2$.

Gelin – Cezarov identitet

$G_{n+2}G_{n+1}G_{n-1}G_{n-2} - G_n^4 = -(a^2 + ab - b^2)^2$.

Melamov identitet

$G_{n+1}G_{n+2}G_{n+6} - G_{n+3}^2 = (a^2 + ab - b^2)(-1)^{n+k+1}G_n$.

Definicija Gibonačijevih brojeva i osobine su iz [8].

7. NEKE FORMULE ZA PRONALAŽENJE FIBONAČIJEVIH I LUKASOVIH BROJEVA

U ovom delu ćemo prikazati (vidi [8]) različite načine dobijanja Fibonačijevih brojeva. Ako želimo da dobijemo neki veći Fibonačijev broj, primenom rekurentne veze i početnih uslova, postupak će biti dug, pa možemo iskoristiti formulu: $F_n = \left\lfloor \frac{\alpha_1^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \right\rfloor$, gde je α_1 pozitivno rešenje kvadratne jednačine $x^2 - x - 1 = 0$.

U ovoj glavi ćemo takođe pokazati neke rekurentne formule za F_{n+1}. Neke od njih su:

$F_{n+1} = \left\lfloor \alpha_1 F_n + \frac{1}{2} \right\rfloor,\ n \geq 2.$

$F_{n+1} = \left\lfloor \frac{F_n + \sqrt{5}F_n + 1}{2} \right\rfloor,\ n \geq 2.$

Naravno, postoje i forrmule za dobijanje Lukasovih brojeva.

$L_{n+1} = \left\lfloor \alpha_1 L_n + \frac{1}{2} \right\rfloor,\ n \geq 2.$

$L_{n+1} = \left\lfloor \frac{L_n + \sqrt{5}L_n + 1}{2} \right\rfloor,\ n \geq 2.$

8. OSOBINE VEZANE ZA DELJIVOST

Uočićemo neke osobine deljivosti Fibonačijevih i Lukasovih brojeva. Ako Fibonačijev broj F_m deli neki drugi Fibonačijev broj F_i onda $m \mid i$. Važi i obrnuto, ako $m \mid i$ onda i $F_m \mid F_i$. Za Lukasove brojeve neće važiti da ako $m \mid i$, onda $L_m \mid L_i$. Pokazaćemo to na kontraprimeru.

Primer 2. Neka je $m = 4$, $i = 8$. Onda je $L_4 = 7$, $L_8 = 47$. Imamo da 4|8, ali ne sledi da je 7|47.

Takođe preko deljivosti možemo uočiti vezu između Lukasovih i Fibonačijevih brojeva, tj. važi da Lukasov broj L_m deli Fibonačijev broj F_i ako i samo ako $2m \mid i$.

Najveći zajednički delilac brojeva F_m i F_i je Fibonačijev broj čiji je indeks zapravo najveći zajednički delilac brojeva m i i. Ovo neće važiti za Lukasove brojeve. Pokazaćemo na kontraprimeru.

Primer 3.

Za najveći zajednički delilac brojeva a i b koristićemo oznaku (a, b).

Neka je $L_3 = 4$ i $L_6 = 18$.

Da li je $(L_m, L_i) = L_{(m,i)}$?

$(L_3, L_6) = (4, 18) = 2 \neq 4 = L_3 = L_{(3,6)}$.

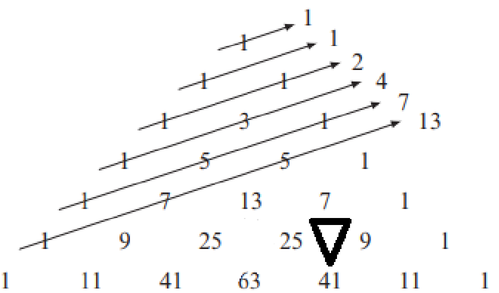
9. TRIBONAČIJEVI BROJEVI

Kao i sve ostale, i ova klasa Fibonačijevih brojeva se definiše preko početnih uslova i rekurentne veze (vidi [9]).

$T_1 = 1$, $T_2 = 1$, $T_3 = 2$ ← početni uslovi

$T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}$, $n \geq 4$ ← rekurentna veza.

Tribonačijevi brojevi se mogu dobiti iz Paskalovog trougla na način prikazan na slici.



Slika 2. *Paskalov trougao i dobijanje Tribonačijevih brojeva pomoću njega*

Primer 4. 41 = 7+25+9

Tribonačijevi brojevi ostvaruju vezu i sa kompozicijom suma. Broj načina na koji se neki prirodan broj može predstaviti kao suma najviše 3 različita broja je jednak T_{n+1}, što je prikazano u narednoj tabeli za prva 4 broja.

Tabela 2. *Predstavljanje brojeva preko suma*

n	Kompozicije	$C_n = T_{n+1}$
1	1	1
2	1 + 1, 2	2
3	1 + 1 + 1, 2 + 1, 1 + 2, 3	4
4	1 + 1 + 1 + 1, 2 + 1 + 1, 1 + 2 + 1, 1 + 1 + 2, 2+2, 3 + 1, 1 + 3	7

10. *K*-NAČI BROJEVI

K-nači niz, u oznaci $\{F_n^{(k)}\}_{n \geq 2-k}$, se definiše (vidi [6]) preko:

1) početnih uslova
$F_{-(k-2)}^{(k)} = F_{-(k-3)}^{(k)} = \cdots = F_0^k = 0$, $F_1^{(k)} = 1$,

2) rekurentne veze

$$F_n^{(k)} = F_{(n-1)}^{(k)} + F_{(n-2)}^{(k)} + \ldots + F_{(n-k)}^{(k)},\ k \geq 2.$$

Za k=2 dobijamo Fibonačijeve brojeve, za k=3 Tribonačijeve brojeve, itd. K-nači brojevi zapravo predstavljaju generalizaciju Fibonačijeve klase brojeva.

11. ZAKLJUČAK

Fibonačijevi brojevi, odnosno nizovi predstavljaju jedne od najpoznatijih brojeva, odnosno nizova na svetu. Osnovano je čak i Fibonačijevo udruženje, 1963. godine u SAD-u, posvećeno Fibonačijevim brojevima, nizovima, aplikacijama zasnovanim na Fibonačijevoj rekurentnoj vezi i srodnim oblastima. Ovi brojevi su prisutni u umetnosti, književnosti, psihologij, takodje se spominju i u bestseleru Dena Brauna, "Da Vinčijev kod".
U ovom radu je predstavljena prisutnost i upotreba Fibonačijevih brojeva u skoro svakoj sferi života, ali tim je obuhvaćen samo jedan deo njihove moći.

12. ZAHVALNICA

Drugi autor se zahvaljuje na podršci u okviru projekta Fakulteta tehničkih nauka pod naslovom "Naučni i pedagoški rad na doktorskim studijama".

13. LITERATURA

[1] Brousseau, A., "*Fibonacci Numbers and Geometry, Fibonacci Quarterly"*, Fibonacci Quarterly 10, pages 303-318, 1972.
[2] Devlin, K., "*The Man of Numbers: Fibonacci's Number Arithmetic Revolution*", Walker Books, 2012.
[3] Dujella, A., "*Uvod u teoriju brojeva; skripta"*, Univerzitet u Zagrebu, Prirodoslovno - matematički fakultet, Zagreb 2003.
[4] Dujella, A., "*Fibonačijevi brojevi*", Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb, 2000.
[5] Goonatilake, S., "*Toward a global Science*", Indiana University Press, Bloomington, Indiana, 1998.
[6] Kuhapatanakul, K., "*The k-nacci triangle and applications",* Cogent Mathematics 4, *page 14*, 2017.
[7] Jeffery, T., Pereira, R., "*Divisibility Properties of the Fibonacci, Lucas, and Related Sequences",* Hindawi Publishing Corporation ISRN Algebra 2014, page 5, 2014.
[8] Koshy, T., "*Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, Volume One*", John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2018.
[9] Koshy, T., "*Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, Volume Two*", John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2019.
[10] Scott, T.C., Marketos, P., "*On the Origin of the Fibonacci Sequence",* MacTutor History of Mathematics, page 46, 2014.
[11] Stevanović, D., Ćirić, M., Simić, S., Baltić, V., "*Diskretna matematika, Osnove kombinatorike i teorije grafova*", Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet, Beograd, mart 2007.
[12] https://www.mathstat.dal.ca/fibonacci
[13] https://www.wikipedia.org

Kratka biografija:

Miloš Marković rođen je 1. septembra 1993. godine u Šapcu. Završio je Šabačku gimnaziju. Upisao je Prirodno – matematički fakultet 2013. godine i diplomirao 2017. Stekao je zvanje Diplomirani profesor matematike. Iste godine upisao je master studije primenjene matematike na Fakultetu tehničkih nauka u Novom Sadu.

Nebojša M. Ralević rođen je 1965. god. u Beranama. Doktorirao je na PMF-u u Novom Sadu 1997. god, a od 2010. god. je u zvanju redovnog profesora matematike na FTN-u u Novom Sadu. Oblasti interesovanja su teorija mere i verovatnoće, numerička matematika, funkcionalna analiza, nelinearne jednačine, fazi sistemi, obrada slike i optimizacija.