

**GENERISANJE SJERPINSKI FRAKTALA UZ POMOĆ PAJTON PROGRAMSKOG JEZIKA****GENERATING SIERPINSKI FRACTALS USING THE PYTHON PROGRAMMING LANGUAGE**

Milica Šimunović, *Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad*

**Oblast – RAČUNARSKA GRAFIKA**

**Kratak sadržaj** – Polazeći od osnovnih koncepata fraktala u uvodu, u radu je opisana teorijska osnova fraktala koja obuhvata istoriju, fraktalnu dimenziju, klasifikaciju fraktala i metode za njihovo generisanje. Pokazane su praktične primene, analiziran je fraktalni fenomen u prirodi i upotreba fraktala u računarskoj grafici. Metodologija i alati korišćeni u istraživanju uključuju programski jezik Pajton (orig. Python) i Gugl Kolab (orig. Google Colaboratory). Generisani su Sjerpinski (orig. Sierpinski) trougao, tepih i Mengerov (orig. Menger) sunder. Prikazani su rezultati i data je uporedna analiza rezultata. Na osnovu izvršenih istraživanja i dobijenih rezultata, zaključuje se da se uz pomoć metoda računarske grafike mogu generisati kompleksni oblici, kao što su fraktali.

**Ključne reči:** Fraktali, metode za generisanje, Sjerpinski trougao, Sjerpinski tepih, Mengerov sunder, Pajton

**Abstract** – Starting from the basic concepts of fractals in the introduction, the paper describes the theoretical foundation of fractals, which encompasses their history, fractal dimension, classification of fractals, and methods for their generation. Practical applications are demonstrated, and the fractal phenomenon in nature, as well as the use of fractals in computer graphics, is analyzed. The methodology and tools used in the research include the Python programming language and Google Colab. Sierpinski triangle, carpet, and Menger sponge are generated, and the results are presented with a comparative analysis of the outcomes. Based on the conducted research and obtained results, it is concluded that complex shapes, such as fractals, can be generated with the help of computer graphics methods.

**Keywords:** Fractals, generation methods, Sierpinski triangle, Sierpinski carpet, Menger sponge, Python

**1. UVOD**

Fraktal je geometrijski lik koji se može razložiti na manje delove tako da je svaki od njih, makar približno, umanjena kopija celine. Još se kaže da je takav lik sam sebi sličan. Matematika koja se nalazi u osnovi fraktala počela je da poprima svoj oblik u 17. veku kada je matematičar i filozof Lajbnic razmatrao osobinu rekurzivne sličnosti samom sebi [1].

**NAPOMENA:**

Ovaj rad proistekao je iz master rada čiji mentor je bila dr Isidora Đurić, docent.

Predmet rada predstavlja analiza, generisanje i vizuelizacija fraktala u oblasti računarske grafike. U tu svrhu, izvršen je teorijski pregled klasičnih tipova fraktala, kao i praktična primena metoda računarske grafike za generisanje nekoliko različitih tipova Sjerpinski (eng. *Sierpinski*) fraktala. Cilj rada predstavlja generisanje Sjerpinski fraktala uz pomoć Pajton (*Python*) programskog jezika. Rezultati istraživanja pokazuju da je, uz pomoć metoda računarske grafike, omogućeno jednostavno generisanje kompleksnih matematičkih oblika, kao što su fraktali. Značaj rada ogleda se u upotrebi popularnih alata, besplatnih za upotrebu, kao što su programski jezik Pajton i Gugl Kolab okruženje, za generisanje i vizuelizaciju kompleksnih oblika.

Tokom izrade rada korišćene su različite metode istraživanja. Na teorijskom planu, sprovedena je analiza literature koja obuhvata oblasti o istoriji fraktala, matematičkoj primeni, razvoju fraktala, kao i analiza literature u kojoj se mogu proučiti činjenice o klasičnim fraktalima i fraktalnoj dimenziji. Praktični deo istraživanja uključuje primenu programskog jezika Pajton za generisanje i vizualizaciju fraktala. Konkretno, kreirani su vizuelni prikazi dvodimenzionalnog Sjerpinskog tepiha i trodimenzionalnog Mengerovog sundera (Sjerpinski tepih u tri dimenzije).

**2. TEORIJSKE OSNOVE**

Euklidska geometrija, karakteristična za pravilne matematičke oblike kao što su konus, piramida, kocka i sfera, ne predstavlja najbolji način da se opišu prirodne forme nepravilnih i neravnih oblika, kakvi su i sami fraktali [2]. U prirodi se mogu sresti brojni oblici koji odgovaraju fraktalima, a to su: oblaci, planinski venci, obale, pahulje, grane drveća, pluća, neuroni, električne munje i slično. Kako bi razumeli svet, ljudi traže jednostavne opise onoga što vide pred sobom.

„Oblaci nisu sferični, planine nisu konusi, obale nisu krugovi, kora nije glatka, a ni munja ne putuje pravolinijski” [3].

Neki od matematičkih primera fraktala, pored Mandelbrotovog skupa, jesu Sjerpinski trougao (eng. *Sierpinski triangle*), Sjerpinski tepih (eng. *Sierpinski carpet*), Kohova pahulja (eng. *Koch snowflake*), Pitagorino drvo (eng. *Pythagoras tree*), Zmajeva kriva (eng. *Dragon curve*), Kantorov skup (eng. *Cantor set*), Žulija skup (eng. *Julia set*) [4].

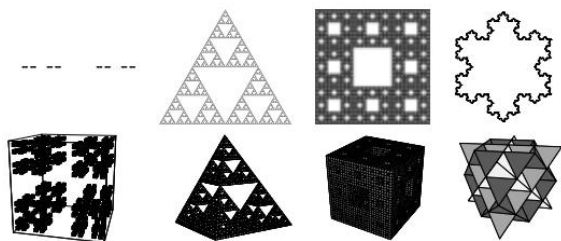
## 2.1 Metode generisanja fraktala

Fraktali mogu biti generisani pomoću određenih softvera. Softveri za generisanje fraktala predstavljaju široku paletu grafičkih alata koji služe za stvaranje slika fraktalnih oblika. Na tržištu postoji mnogo programa za generisanje fraktala, kako besplatnih, tako i komercijalnih. Pored toga, postoje i mobilne aplikacije koje omogućavaju eksperimentisanje. Softveri mogu dati doprinos u razumevanju fraktalnih matematičkih koncepata. U osnovi, postoje dva ključna pristupa za kreiranje fraktala. Prvi pristup uključuje iteraciju, gde se ponavljaju određene računске operacije putem rekurzivnog procesa (kako bi se pojednostavili proračuni).

Sa druge strane, drugi pristup koristi sisteme iterativnih funkcija koji se sastoje od niza afinih transformacija. U prvom pristupu, svaki piksel na slici fraktala se analizira na osnovu određene matematičke funkcije, a zatim se boji, pre nego što se isti proces primeni na sledeći piksel. Ovaj metod karakteriše tradicionalni stohastički pristup generisanja fraktala. Drugi pristup gradi linearni model fraktala putem kombinacije afinih transformacija [5]. U praktičnom delu master rada su fraktali generisani putem Pajton skripte u oruženju Gugl Kolab, bez ikakvog postojećeg softvera, međutim, postoji i ovakav način kreiranja fraktala.

## 2.2 Klasični fraktali

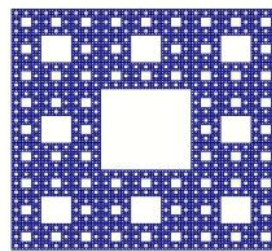
Neki matematički primeri fraktala su bili poznati mnogo godina ranije pre nego što ih je poljsko-francuski matematičar Benoa Mandelbrot, otac fraktalne geometrije, prozvao svojim poljem. Nisu svi fraktali smešteni u ravni. Poenta je proširenje na tri dimenzije. Na slici 1 su u gornjem redu prikazani trećina Kantorovog skupa, Sjerpinski trougao, Sjerpinski tepih i Kohova pahulja. U donjem redu su verzije ovih fraktala u trodimenzionalnom obliku Kantorova kocka (Kantorov oblak), Sjerpinski tetraedar, Mengerov sunder i Kohov tetraedar [2].



Slika 1. Osam klasičnih fraktala u dve i tri dimenzije (iznad) i tri dimenzije (ispod) [2]

Sjerpinski tepih, prvi put opisan 1916. godine od strane Vaclava Sjerpinskog (orig. *Waclaw Sierpiński*), je fraktal formiran deljenjem jediničnog kvadrata na devet kongruentnih kvadrata, uklanjanjem središnjeg i ponavljanjem procesa za svaki od preostalih osam kvadrata beskonačno mnogo puta [6]. Upravo ovaj fraktal će biti generisan u prvom delu praktičnog rada.

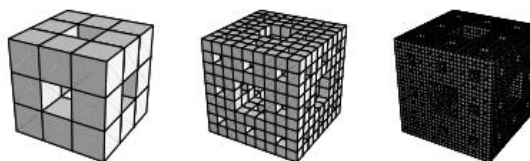
Nakon prvog koraka dobije se 8 jednakih kvadrata, nakon drugog koraka 64, a nakon  $n$ -tog koraka postoji  $8^n$  kvadrata. Sjerpinski tepih se smatra i generalizacijom Kantorovog (orig. *Cantor*) skupa [7]. Na slici 2 prikazan je Sjerpinski tepih.



Slika 2. Sjerpinski tepih [8]

Mengerov sunder je prvi put opisan austrijski matematičar Karl Menger (eng. *Carl Menger*) 1926. godine kao deo svog istraživanja načina za generalizaciju pojma dimenzije [2]. Mengerov sunder će biti generisan u drugom delu praktičnog rada.

Mengerov sunder je trodimenzionalna varijanta Sjerpinskog tepiha. Često se naziva i Sjerpinski-Mengerov sunder. Svaka strana Mengerovog sundera jeste Sjerpinski tepih. Dobija se na sličan način kao i tepih Sjerpinskog, samo što je početni oblik, umesto kvadrata, kocka. Kocka se deli na 27 kocaka čije su dužine stranica tri puta manje od početne. Nakon toga se oduzima 7 kocaka, odnosno središnja i 6 kocaka koje se nalaze u središtima strana početne kocke. Postupak se ponavlja sa preostalim kockama. Na slici 3 prikazan je Mengerov sunder, prve tri iteracije [7].



Slika 3. Mengerov sunder, prve tri iteracije [2]

## 3. PREDMET I CILJ ISTRAŽIVANJA

Predmet istraživanja rada obuhvata oblast kompjuterske geometrije s fokusom na generisanje i vizualizaciju fraktala u računarskoj grafici. U tu svrhu korišćen je programski jezik Pajton (orig. *Python*) i Gugl Kolab (orig. *Google Colab*). Specifično, cilj istraživanja je generisanje i vizualizacija dvodimenzionalnog (2D) i trodimenzionalnog (3D) Sjerpinskih tepiha. Tema i svrha istraživanja ovog rada usmereni su ka detaljnom istraživanju fraktala, kao složenih geometrijskih oblika koji se pojavljuju u raznim naučnim disciplinama i prirodi. Rad se sastoji od teorijskog i praktičnog dela, a oba aspekta imaju za cilj praktičnu analizu fraktala.

Praktični deo istraživanja uključuje primenu programskog jezika Pajton za generisanje i vizualizaciju fraktala. Konkretno, kreirani su vizualni prikazi dvodimenzionalnog Sjerpinskog tepiha i trodimenzionalnog Mengerovog sundera (Sjerpinski tepih u tri dimenzije), i izvršena je uporedna analiza korišćenih metoda, kao i dobijenih rezultata. U radu je opisano i prethodno istraživanje koje uključuje generisanje i vizualizaciju Sjerpinski trougla. Cilj ovog dela istraživanja bio je demonstrirati kako se fraktali mogu generisati i vizualizovati pomoću

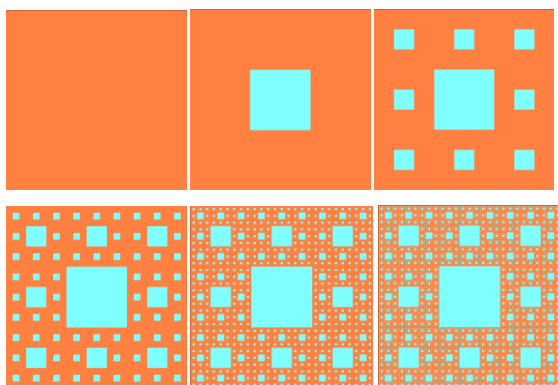
programskog jezika Pajton, istražiti njihovu strukturu i karakteristike, i vizuelno ih prikazati.

## 4. GENERISANJE I VIZUALIZACIJA SJERPINSKI TEPIHA I MENGEROVOG SUNDERA UZ POMOĆ PAJTON PROGRAMSKOG JEZIKA

### 4.1. Sjerpinski tepih

Pajton kod, u kom je generisan Sjerpinski tepih, ima svrhu generisanja animiranog GIF-a koji prikazuje tepih. Ovaj tepih je složena fraktalna struktura koja se formira rekursivno, i to sa određenim brojem nivoa dubine. Svaki nivo dodaje detalje tepihu, a nivoi se kombinuju kako bi se stvorila animacija.

Konačni rezultat je animirani GIF koji prikazuje postepeno formiranje Sjerpinskog tepiha. Odrađeno je pet iteracija, jer sve iznad toga je zahtevno za računar i stvara se gusta mreža kvadrata. Na slici 4 prikazano je prvih 5 iteracija (i nulta od koje se počinje).



Slika 4. Prvih pet iteracija Sjerpinski tepiha

### 4.2. Mengerov sunder

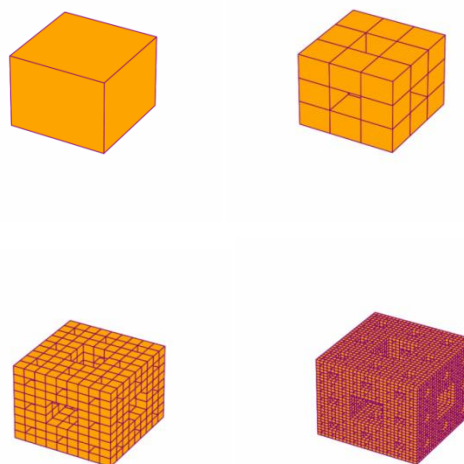
Drugi Pajton kod generiše animaciju Mengerovog sundera u trodimenzionalnom prostoru. Mengerov sunder je složena fraktalna struktura koja se formira rekursivno, sa određenim brojem nivoa dubine. Kod koristi biblioteke poput *Matplotlib* za crtanje i *PIL* za manipulaciju slikama kako bi se kreirala animacija.

Svaki nivo dodaje detalje sunderu, a animacija prikazuje postepeno formiranje ove fraktalne strukture. Samim tim što se radi o trodimenzionalnom prostoru, zahtevnije je i za sam računar, stoga mnogo više vremena je potrebno da se kod izvrši nego što je to bio slučaj sa tepihom u prethodnom kodu.

Najpre je oadađeno tri iteracije (počevši od nulte), samim tim je na prvoj slici ispunjena kocka. Na slici 5 prikazan je Mengerov Sunder, prve tri iteracije.

## 5. UPOREDNA ANALIZA REZULTATA

U master radu je opisan i postupak generisanja Sjerpinskog tepiha, obrađenom u toku semestra na predmetu Kompiuterska geometrija. U skladu sa tim, u nastavku teksta će biti analizirane sličnosti i razlike prilikom generisanja sva tri fraktala.



Slika 5. Mengerov sunder, prve tri iteracije

Zajedničke karakteristike ovih kodova su najpre korišćenje Pajton programskog jezika za implementaciju, a koriste i biblioteke za postizanje ciljeva (za vizualizaciju, rad sa nizovima, rad sa slikama i slično). Sva tri koda koriste funkcije za organizaciju koda i omogućavaju modularnost, što olakšava čitanje i razumevanje koda. Imaju komponentu za prikazivanje rezultata (za vizualizaciju). Svi kodovi omogućavaju postavljanje različitih parametara kao što su nivo detalja (broj iteracija), veličina, trajanje animacije i drugi parametri kako bi se kontrolisalo generisanje i prikazivanje fraktalnih oblika. Zajedničko za Sjerpinski tepih i Sjerpinski sunder jeste da se koriste rekursivni pristupi za generisanje.

Razlike između kodova Sjerpinskog trougla, tepiha i sundera su to što svaki kod koristi različite biblioteke specifične za svoju svrhu. Zajedničko im je da je biblioteke potrebno uvesti za rad, ali suštinski koriste različite biblioteke u skladu sa ciljevima. Na primer, prvi kod koristi *matplotlib* i *random*, drugi koristi *PIL* i *IPython.display*, dok treći koristi *matplotlib*, *numpy*, *mpl\_toolkits.mplot3d*, *PIL* i *io*.

Metode generisanja razlikuju se između koda za trougao i kodova za tepih i sunder. Kod za Sjerpinski trougao koristi slučajnu šetnju kako bi trougao bio generisan, dok druga dva, kao što je navedeno, koriste rekursivne pristupe. Razlika se primećuje kod vrste vizualizacije, jer prvi kod prikazuje tačke u ravni, drugi kod generiše gif datoteku koja prikazuje tepih s različitim nivoom detalja, dok treći kod koristi animaciju za trodimenzionalnu vizualizaciju sundera. Prvi kod, za Sjerpinski trougao, ne čuva rezultat kao gif datoteku, već koristi *matplotlib* za generisanje statičkog prikaza Sjerpinskog trougla u okviru Gugl Kolab okruženja, ali ne generiše animaciju niti čuva rezultat kao gif datoteku. Drugi kod, za generisanje tepiha, generiše gif animaciju koja prikazuje tepih i čuva je na računar. Treći kod, za generisanje sundera, animaciju prikazuje u okruženju Gugl Kolab i daje mogućnost da se animacija pusti ispočetka, pusti unazad, ponavlja beskonačno ili samo jednom, a takođe tu animaciju čuva kao gif datoteku.



Iako postoje zajednički elementi, ova tri koda čine različitim razlike u svrsi, algoritmima i specifičnostima implementacije. Svaki kod je usmeren različitoj vrsti Sjerpinski oblika (trougao, tepih ili sunder) i koristi različite tehnike kako bi postigao svoj cilj.

## 6. ZAKLJUČAK

Na osnovu prethodnih istraživanja, kao i istraživanja sprovedenih u radu zaključeno je da se generisanje fraktala (Sjerpinski) može postići različitim tehnikama i algoritmima. Sjerpinski trougao je moguće iscrtati pomoću slučajne šetnje, odabirom tačke unutar velikog trougla, a zatim nasumičnim kretanjem prema jednom od vrhova velikog trougla i crtanjem tačke na pola puta između trenutne tačke i odabranog vrha. Ovaj proces se ponavlja mnogo puta kako bi rezultat bio Sjerpinski trougao.

U ovom istraživanju se moglo zaključiti da se prilikom kreiranja fraktala proces ponavlja i da se generisani oblik sastoji od replika manjih dimenzija. Vizualizacijom se može primetiti da je fraktal umanjena replika celine koja se ponavlja u beskonačnost.

Kod generisanja Sjerpinskog tepiha, deli se veliki kvadrat na manje kvadrate, s tim da je jedan centralni, i taj postupak se ponavlja, s tim da se svaki put smanjuje veličina kvadrata.

Treći kod, Mengerov sunder, zapravo je tepih u trodimenzionalnom prostoru i suština je ista kao kod tepiha, samo su u pitanju kocke. Jedna kocka se deli na više kocaka i ona u sredini se izbacuje. Zaključak je da je uz pomoć metoda računarske grafike, omogućeno jednostavno generisanje kompleksnih matematičkih oblika, kao što su fraktali.

U ovom radu, u tu svrhu korišćeni su programski jezici Pajton i Gugl Kolab radno okruženje. Značaj rada ogleda se u upotrebi popularnih alata, besplatnih za upotrebu, kao što su programski jezik Pajton i Gugl Kolab okruženje, za generisanje i vizuelizaciju kompleksnih oblika.

## 7. LITERATURA

- [1] Mamta Rani, Saloni, *Fractals: A research*, International Journal Of Computer Engineering&Technology (IJCT), 289-307(2013);
- [2] Michael Frame, Amelia Urry, *Fractal Worlds, Grown, Built, and Imagined*, Yale university press, New Haven and London (2016);
- [3] Benoit B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of nature*, W.H. Freeman and company, New York (1977);
- [4] Aleksandra Ivković, *Fraktalna geometrija Koch-ove krive*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku (2019);
- [5] <https://www.scitepress.org/Papers/2020/104624/104624.pdf> (pristupljeno u oktobru 2023.)
- [6] Karuna Sangam, *Homeomorphisms of the Sierpinski carpet*, Bard College, Annandale-on-Hudson, New York (2018);
- [7] Antonijo Sabljak, *Klasični fraktali*, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Osijek (2018);

### Kratka biografija:



**Milica Šimunović** rođena je u Novom Sadu 1999 godine. Osnovnu školu „Desanka Maksimović“ je završila u Futogu, a nakon gimnazije „Isidora Sekulić“ je 2018. upisala osnovne studije na Fakultetu tehničkih nauka, smer Animacija u inženjerstvu na departmanu za Računarsku grafiku. Diplomirala je 2022. godine sa temom diplomskog rada „Psihološko-simbolički uticaj boja u video animacijama“.

Kontakt:

simunovicmilica99@gmail.com