Zbornik radova Fakulteta tehničkih nauka, Novi Sad

UDK: 517.98
DOI: https://doi.org/10.24867/30JV01Ljiljanic

KOMBINATORNE IGRE
COMBINATORIAL GAMES

Jelena Ljiljanić, *Fakultet Tehničkih nauka, Novi Sad*

Oblast – **MATEMATIKA U TEHNICI**

Kratak sadržaj – *Rad sadrži osobine kombinatornih igara, koje predstavljaju posebnu klasu u matematičkoj teoriji igara. Definišu se glavni elementi ovih igara i navodi osnovna podela. Takođe, prolazi se kroz različite primere ovih igara, kao i kroz različite načine analize pozicija i strategija u igri.*

Ključne reči: *Igra, pozicija, strategija*

Abstract - *The paper presents the characteristics of combinatorial games, which represent a special class in the mathematical game theory. The main elements of these games are defined, and the basic classification is provided. Additionally, various examples of these games are discussed, along with different methods of analyzing positions and strategies in the game.*

Keywords: *Game, position, strategy.*

1. UVOD

Kombinatorne igre su igre za dva igrača sa savršenim informacijama i bez slučajnih poteza. To znači da su oba igrača u svakom trenutku svesna svih poteza koji su napravljeni i svih informacija koje su dostupne i da nisu dozvoljeni slučajni potezi kao što su bacanje kocke ili deljenje karata. Ishod ovih igara je dobitak za jednog, a gubitak za drugog igrača. Kombinatorne igre određuje skup pozicija, uključujući i početnu poziciju igrača, i skup dozvoljenih poteza između pozicija. Igra se kreće od jedne pozicije do druge, pri čemu se igrači obično smenjuju u potezima, sve dok se ne dostigne terminalna pozicija. Terminalna pozicija je ona iz koje potezi više nisu mogući. Tada se jedan od igrača proglašava pobednikom, a drugi gubitnikom.

2. OSOBINE KOMBINATORNIH IGARA

Za kombinatornu igru sa skupom pozicija X kaže se da je progresivno ograničena ako za svaku početnu poziciju $x \in X$ postoji konačno ograničenje broja poteza do završetka igre. Maksimalan broj poteza od x do završne pozicije označava se sa $B(x)$.

Opšta podela kombinatornih igara je na dve kategorije. Prva kategorija su igre u kojima su pobedničke pozicije i dostupni potezi jednaki za oba igrača, ovakve igre na engleskom nose naziv *impartial*. Druga kategorija su igre u kojima svaki igrač ima različite skupove pobedničkih pozicija ili različiti skup mogućih poteza sa date pozicije, takve igre nose naziv *partizan*[1].

NAPOMENA:
Ovaj rad proistekao je iz master rada čiji mentor je bila dr Buda Bajić Papuga.

U standardnom obliku kombinatorne igre pobeđuje onaj igrač koji je poslednji odigrao potez. Igre u kojima igrač koji je poslednji odigrao potez gubi nazivaju se *misère*.

2.1. P- i N-pozicije kod *impartial* igara

Za bilo koju *impartial* kombinatornu igru, definišemo sa N skup pozicija koje igraču koji je na redu mogu garantovati pobedu-takve pozicije nazivamo N-pozicijama. Skup pozicija sa kojih svaki potez vodi ka N-poziciji označavamo sa P, pozicije koje pripadaju ovom skupu mogu garantovati pobedu prethodnom igraču i nazivamo ih P-pozicije. Svaka moguća pozicija u igri je ili P-pozicija ili N-pozicija. Da bismo uspeli da rešimo i analiziramo igru najpre moramo da odredimo koje su to P-pozicije, a koje N-pozicije.

Definicija 1 *P-pozicije i N-pozicije su definisane rekurzivno sledećim tvrdnjama:*

- *Sve terminalne pozicije su P-pozicije.*
- *Sa svake N-pozicije postoji bar jedan potez do P-pozicje.*
- *Sa svake P-pozicije svaki potez vodi do N-pozicije.*

Nakon pravilno određenih P-pozicija i N-pozicija, lako uočavamo da je strategija pomeranja ka P-pozicijama zapravo pobednička stategija[2].

Teorema 1 *U progresivno ograničenoj impartial kombinatornoj igri u standardnom obliku, sve pozicije spadaju u $N \cup P$. Dakle, iz bilo koje početne pozicije, jedan od igrača ima pobedničku strategiju.*

3. NIM

3.1. Igra Oduzimanja

Igra Oduzimanja spada u *impartial* kombinatorne igre. Neka se na gomili na stolu nalazi n žetona, $n \in \mathbb{N}$, i neka je S skup pozitivnih celih brojeva manjih od n. Pravila igre su sledeća: imamo dva igrača (igrača I i igrača II), koji igraju naizmenično, potez svakog igrača se sastoji u tome da iz gomile od n žetona uzme s žetona, gde $s \in S$. Igrač koji uzme poslednji žeton pobeđuje. Za bilo koje $n \in \mathbb{N}$ ova igra je progresivno ograničena sa $B(x) = n$. Za analizu ove igre koristimo indukciju unazad.

Zamislimo da se na stolu nalazi 21 žeton, igrač I i igrač II imaju zadatak da naizmenično uzimaju po 1, 2 ili 3 žetona, sve dok na stolu ne ostane nijedan žeton. Dakle, skup $S = \{1, 2, 3\}$, a $n = 21$. Postoji samo jedna terminalna pozicija i to je kada na stolu ostane 0 žetona, po definiciji sledi da je to P-pozicija. Ukoliko na stolu ostane jedan, dva ili tri žetona igrač koji je na redu da povuče potez pobeđuje, te su to N-pozicije. Pretpostavimo da je na stolu ostalo četiri žetona, oni predstavljaju gubitak za igrača koji je naredni na potezu, ali i pobedu za prethodnog igrača. Zaključujemo da je slučaj kada na stolu ostanu četiri žetona P-pozicija. Vidimo da će nam pozicije kada na stolu nakon našeg poteza ostane 0, 4, 8, 12, 16 i 20 žetona doneti pobedu. Kako broj 21 nije deljiv sa četiri, igrač I uvek može pobediti ako u svom prvom potezu uzme jednu šibicu. Šta god igrač II uradio, igrač I može pobediti tako što će uvek uzimati onoliko žetona koliko je potrebno da na stolu ostane broj žetona deljiv sa 4.

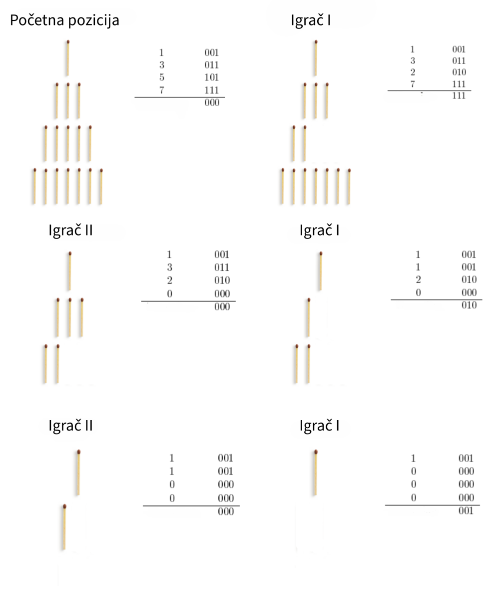
3.2. Igra Nim i pojam Nim-zbira

Na samom početku igre se na stolu nalazi nekoliko gomila šibica, svaka od tih gomila sadrži konačan broj šibica. Dozvoljeni potezi ove igre su sledeći: igrači naizmenično sklanjaju pozitivan broj šibica iz koje god gomile žele. Dakle, dozvoljeno je uzeti koliko god šibica želeli sa gomile koju odaberete, ali za vreme jednog poteza nije dozvoljeno uzimati šibice sa različitih gomila. Pobednik je onaj koji uzme i poslednju šibicu. Poziciju u igri ćemo označavati sa $(x_1, x_2, \dots, x_k)$. Ovo znači da postoji k gomila šibica i da se u prvoj gomili nalazi x_1 šibica, u drugoj x_2 šibica, i tako dalje. Nim-zbir brojeva se nalazi predstavljanjem brojeva u bazi dva i korišćenjem sabiranja sa modulom dva na odgovarajućim komponentama[3].

Definicija 2 *Nim-zbir brojeva* $x = (x_m x_{m-1} \dots x_1 x_0)_2$ *i* $y = (y_m y_{m-1} \dots y_1 y_0)_2$ *je broj* $z = (z_m z_{m-1} \dots z_1 z_0)_2$. *Pišemo* $(x_m x_{m-1} \dots x_1 x_0)_2 \oplus (y_m y_{m-1} \dots y_1 y_0)_2 = (z_m z_{m-1} \dots z_1 z_0)_2$, *gde je* $z_k \equiv_2 x_k + y_k$, $k = 1, \dots, m$, *a* $\equiv_2$ *ostatak pri deljenju sa dva.*

Teorema 2 *Pozicija* $X = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ *igre Nim je P-pozicija ako i samo ako je Nim-zbir njenih komponenti jednak nuli, tj. ako je* $x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_k = 0$.

Primer 1



Slika 1: *Pobeda igrača II u igri Nim*

Na stolu se se 16 šibica raspoređenih u 4 gomile. Stavimo se u ulogu igrača II i pokušajmo da dobijemo ovu igru konstantnim prelaženjem na P-pozicije, odnosno pozicije čije je Nim-zbir jednak nuli. Na slici 1 je predstavljen tok cele partije igre Nim, potezi igrača I su u potpunosti slučajni, dok su potezi igrača II prelazi na P-pozicije.

4. GRAFIČKO PREDSTAVLJANJE IGARA I SPRAG-GRANDIJEVA FUNKCIJA

Pojedine kombinatorne igre možemo predstaviti i uz pomoć usmerenog grafa. To se postiže identifikovanjem pozicija u igri sa čvorovima grafa i poteza igre sa putevima u grafu. Dakle, za usmereni graf $G = (X, F)$ skup X će biti skup pozicija u igri, dok će F biti funkcija i za svako $x \in X$, $F(x) \subset X$ će predstavljati pozicije na koje igrač može da se pomeri sa pozicije x. Pozicije koje pripadju skupu $F(x)$ nazivamo sledbenicima pozicije x. Ukoliko je $F(x) = \emptyset$ pozicija x je terminalna pozicija. Kao i do sada imamo dva igrača, igrača I i igrača II, oni se naizmenično smenjuju u potezima i uzmimo da prvi igra igrač I. Kod igara na grafovima potrebno je najpre odrediti početnu poziciju $x_0 \in X$, dalje se sledi sledeće pravilo: na poziciji x igrač koji je na redu da igra bira poziciju $y \in F(x)$. Onaj igrač koji se nađe na terminalnoj poziciji u svom potezu i stoga ne može dalje da igra, gubi.

4.1. Sprag-Grandijeva funkcija

Pored P- i N- pozicija za analizu igara na grafovima može se koristiti i Sprag-Grandijeva funkcija.

Definicija 3 *Sprag-Grandijeva funkcija grafa* $G = (X, F)$ *je funkcija* g *definisana na* X*, koja uzima nenegativne celobrojne vrednosti tako da:*

$$g(x) = \min\{n \geq 0 : n \neq g(y) \text{ za } y \in F(x)\}.$$

Funkciju g *možemo definisati i preko minimalnog isključnog elementa kao:*

$$g(x) = mex\{g(y) : y \in F(x)\}.$$

Način na koji se Sprag-Grandijeva funkcija koristi za analiziranje igara na grafovima je sledeći: sve pozicije x za koje važi da je $g(x) = 0$ su P-pozicije, sve pozicije za koje to ne važi su N-pozicije. Pobednička strategija jeste pri svakom potezu izabrati put koji vodi do čvora sa vrednošću Sprag-Grandijeve funkcije jednakoj nuli[1].

Pretpostavimo da imamo dato n progresivno ograničenih grafova: $G_1 = (X_1, F_1), G_2 = (X_2, F_2), \dots, G_n = (X_n, F_n)$. Kombinacijom ovih grafova dobijamo novi graf $G = (X, F)$, u oznaci $G = G_1 + G_2 + \dots + G_n$, koji nazivamo sumom grafova $G_1, G_2, \dots, G_n$.

Teorema 3 *Ako je* g_i *Sprag-Grandijeva funkcija grafa* G_i, $i = 1, \dots, n$, *tada i suma grafova* $G = G_1 + G_2 + \dots + G_n$ *ima Sprag-Grandijevu funkciju i ona je definisana kao* $g(x_1, \dots, x_n) = g_1(x_1) \oplus \dots \oplus g_n(x_n)$.

5. IGRE OKRETANJA NOVČIĆA

Posebnu klasu *impartial* kombinatornih igara čine igre okretanja novčića. U ovim igrama imamo dat konačan niz novčića, od kojih svaki pokazuje glavu ili pismo. Potezi ove igre se sastoje u okretanju novčića sa glave na pismo i obrnuto. Kako bi postojala garancija da će se igra završiti u

konačnom broju poteza imamo završni uslov koji kaže da krajnji desni novčić prilikom okretanja mora preći sa glave na pismo. Konačni cilj igre je postići da su svi novčići okrenuti na istu stranu, bila to glava ili pismo, i onaj igrač koji povuče poslednji potez pobeđuje.
Jedan od primera ovakvih igara jeste igra pod nazivom Lažne kornjače (eng. *Mock Turtle*). Horizontalni red od n novčića raspoređen je tako da neki od njih pokazuju glavu, a neki pismo. Igraču je dozvoljeno da preokrene jedan, dva ili tri novčića, pri čemu krajnji desni novčić prelazi sa glave na pismo. U primerima ćemo koristiti latinično slovo H za glavu (eng. *head*) i latinično slovo T za pismo (eng. *tails*). Ukoliko, imamo 9 novčića raspoređenih na sledeći način:

T	H	T	T	H	T	T	T	H
0	1	2	3	4	5	6	7	8

dozvoljeni potez za igrača je da na primer okrene novčić na poziciji 4 sa glave na pismo i novčić na poziciji 0 sa pisma na glavu. U vezi traženja SG-vrednosti pozicija koristimo sledeće. Pozicija sa k glava na mestima $x_1, x_2, \ldots, x_k$ može se predstaviti kao (disjunktna) suma k igara od kojih svaka ima na tačno jednom mestu novčić koji pokazuje glavu, pri čemu je za $j = 1, 2, \ldots, k$ glava u igri j na mestu x_j. Napisaćemo koje su to SG-vrednosti pozicija ove igre kada postoji tačno jedan novčić koji pokazuje glavu i on se nalazi krajnje desno. Ukoliko je glava na mestu 0, ona se može okrenuti na pismo i time preći na terminalnu poziciju pa je SG-vrednost jednaka 1. Glava na mestu 1 može se okrenuti i time dobiti terminalna pozicija ili se nakon okretanja tog novčića može okrenuti i onaj na mestu 0 sa pisma na glavu. Dobija se da je SG-vrednost jednaka 2. Kada novčić na mestu 2 prikazuje glavu nakon okretanja može se dobiti glava na mestu 1, glava na mestu 0, glave na mestima 1 i 0, ili terminalna pozicija. Tada dobijamo da je $g(2) = \operatorname{mex}\{g(1), g(0), g(1) \oplus g(0)\} = \{2, 1, 3\} = 4$.

Primer 2 *Igrajmo igru Lažnih kornjača. Zamislimo da se na stolu nalazi* 11 *novčića okrenutih na sledeći način:*

Ovo predtstavlja početnu poziciju igre. Određujemo da li je u pitanju P- ili N-pozicija, odnosno određujemo Nim-zbir vrednosti SG-funkcije za mesta na kojima novčići pokazuju glavu. Za računanje koristimo tabelu **??**. *Kako se u početnoj poziciji novčići koji pokazuju glave nalaze na mestima* $2, 3, 4, 6$ *i* 10 *računamo Nim-zbir za:*

$$g(2) \oplus g(3) \oplus g(4) \oplus g(6) \oplus g(10) = 4 \oplus 7 \oplus 8 \oplus 13 \oplus 21 = 19.$$

Dakle, ovo je N-pozicija, pa po teoremi **??** *sledi da igrač I ima pobedničku strategiju. Dajemo primer mogućeg toka igre u kojoj su potezi igrača II u potpunosti slučajni, dok su potezi igrača I takvi da stalno prelazi na pozicije sa Nim-zbirom jednakim nula, tj. na P-pozicije.*

Početna pozicija:

0	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
T	*T*	*H*	*H*	*H*	*T*	*H*	*T*	*T*	*T*	*H*

$$g(2) \oplus g(3) \oplus g(4) \oplus g(6) \oplus g(10) =$$

$$4 \oplus 7 \oplus 8 \oplus 13 \oplus 21 = 19$$

Igrač I okreće novčiće 10, 3 i 0:

0	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
H	*T*	*H*	*T*	*H*	*T*	*H*	*T*	*T*	*T*	*T*

$$g(0) \oplus g(2) \oplus g(4) \oplus g(6) =$$

$$1 \oplus 4 \oplus 8 \oplus 13 = 0$$

Igrač II okreće novčiće 6, 3 i 1:

0	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
H	*H*	*H*	*H*	*H*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*

$$g(0) \oplus g(1) \oplus g(2) \oplus g(3) \oplus g(4) =$$

$$1 \oplus 2 \oplus 4 \oplus 7 \oplus 8 = 8$$

Igrač I okreće novčić 4:

0	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
H	*H*	*H*	*H*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*

$$g(0) \oplus g(1) \oplus g(2) \oplus g(3) =$$

$$1 \oplus 2 \oplus 4 \oplus 7 = 0$$

Igrač II okreće novčić 0:

0	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
T	*H*	*H*	*H*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*

$$g(1) \oplus g(2) \oplus g(3) =$$

$$2 \oplus 4 \oplus 7 = 1$$

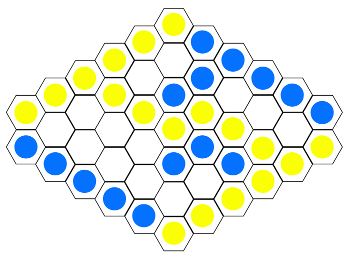
Igrač I okreće novčiće 3,2 1:

0	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
T	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*

Svi novčići pokazuju pismo, igrač I je pobednik!

6. HEKS

Kombinatorne igre koje spadaju u grupu *partizan* igara najčešće se prikazuju preko skupa čvorova X koji predstavljaju pozicije igre i preko dva skupa usmerenih grana koje predstavljaju dozvoljene poteze za dva igrača. Jedna od najmlađih ovakvih igara je igra Heks.
Heks se igra na ploči u obliku romba prekrivenog šestouglovima tj. heksagonima. Šestougli od kojih se ploča sastoji se nazivaju ćelije, polja ili heksovi. Igračima se dodeljuju kamenčići, jedan igrač dobija kamenčiće plave boje, a drugi kamenčiće žute boje. Takođe im se dodeljuju i po dve suprotne strane ploče. Igrači naizmenično postavljaju jedan kamenčić svoje boje na prazna polja. Jednom kada se kamenčići postave oni ne smeju da se pomeraju, zamenjuju niti uklanjaju sa ploče. Cilj svakog igrača je da formira niz kamenčića u svojoj boji tako da taj niz poveže njegove dve strane ploče, odnosno da napravi monohromatski prelaz[4].

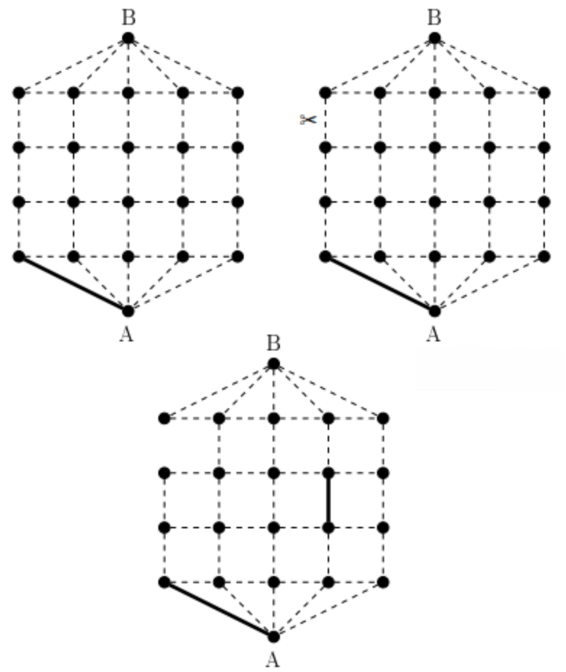


Slika 2: *Primer igre u kojoj pobeđuje žuti igrač*

Pronalazak pobedničke strategije u igri Heks je za sada ostao nerešen problem, osim kada je tabla mala. Ono što se može pokazati jeste da igrač koji prvi pravi potez ima pobedničku strategiju i da na ploči prekrivenoj kamenčićima mora postojati tačno jedan niz kamenčića koji spaja naspramne strane prekrivene kamenčićima jednakih boja kao i kamenčići koji prave niz.

7. ŠENONOVA IGRA PREKLAPANJA

Šenonovu igru preklapanja igraju dva igrača, njihova imena na engleskom glase *Cut* i *Short*. Igra se igra na povezanom grafu sa dva izdvojena čvora, ove čvorove obeležićemo velikim latiničnim slovima A i B. Dozvoljen potez za igrača *Short* jeste "učvršćivanje"grane u grafu, čime je čini otpornom na sečenje. Dozvoljen potez za igrača *Cut* je da šeče"granu grafa koja nije učvršćena. *Short* pobeđuje ako uspe da poveže čvorove A i B putem pojačanih grana. *Cut* pobeđuje ako uspe da razdvoji čvorove A i B. Na sledećoj slici dat je prikaz moguća prva tri poteza Šenonove igre preklapanja, u kojoj je prvi na redu *Short*. Sve grane u grafu su predstavljene isprekidanim linijama. Podebljanim linijama prikazane su one grane koje *Short* učvrsti, dok grane koje *Cut* iseče imaju sa svoje leve strane simbol makazica.



Slika 3: *Prva tri poteza Šenonove igre preklapanja*

Ova igra spada u grupu *partizan* kombinatornih igara. Šenonova igra preklapanja se mora završiti nakon konačnog broja poteza tj. ona je progresivno ograničena i jedan od dvojice igrača mora pobediti. Za ovu igru takođe važi da pobedničku strategiju ima onaj igrač koji je prvi na potezu, bilo da je to *Short* ili *Cut*[5].

8. ZAKLJUČAK

U poređenju sa drugim oblastima matematike teorija igara se smatra relativno mladom disciplinom. Kombinatorne igre predstavljaju posebnu grupu matematičkih igara. U radu smo uveli važne alate koji pomažu pri određivanju pobedničkih strategija, kao što su Nim-zbir i Sprag-Grandijeva funkcija, cija je upotreba u pobednickim strategijama pojedinih igara ilustrovana u radu.

9. LITERATURA

[1] T. S. Ferguson, ”A Course in Game Theory”, World Scientific, 2020.

[2] A. R. Karlin, Y. Peres, ”Game Theory, Alive”, *American Mathmetical Society*, vol. 101, 2016.

[3] E. R. Berlekamp, J. H. Conway, R. K. Guy, ”Winning ways for your mathematical plays”, AK Peters/CRC Press, vol.4, 2004.

[4] C. Browne ”Hex Strategy: Making the right connections”, AK Peters/CRC Press, 2009.

[5] Kimberly Wood, ”Switching the Shannon switching game”, Bard College, 2012.

Kratka biografija:

Jelena Ljiljanić rođena je u Novom Sadu 2000. god. Master rad na Fakultetu tehničkih nauka iz oblasti Matematika u tehnici odbranila je 2024. god.
Kontakt: ljiljaniceva@gmail.com