

Pregled modifikacija Kalmanovog filtera na primeru praćenja pokretnog objekta Review of Kalman Filter Modifications Using the Example of Tracking a Moving Object

Anastasija Golić, Fakultet Tehničkih nauka, Novi Sad

Oblast – S Računarstvo i automatika

Kratak sadržaj – Cilj ovog rada je upoređivanje performansi modifikacija Kalmanovog filtera u svrhu estimacije trajektorije pokretnog objekta

Ključne reči: Kalmanov filter, unscented Kalmanov filter, extended Kalmanov filter, ensemble Kalmanov filter

Abstract - This guideline for submitting a manuscript for the Proceedings of the Faculty of Technical Sciences is given for publication of scientific and technical papers.

Keywords: Kalman filter, unscented Kalman filter, extended Kalman filter, ensemble Kalman filter

1. UVOD

U savremenim aplikacijama kao što su autonomna vožnja, navigacija robota i sistemi za kontrolu letelica, precizno praćenje objekata duž različitih trajektorija predstavlja ključni izazov. Za postizanje tačnosti u proceni pozicije, brzine i orijentacije, potrebne su napredne tehnike filtriranja koje integrišu nesigurne ili zašumljene podatke u realnom vremenu. U autonomnim vozilima, na primer, vozilo mora neprekidno procenjivati svoju poziciju i poziciju drugih učesnika u saobraćaju kako bi moglo bezbedno i efikasno navigirati [1]. Sličan princip važi za robote i letelice, gde precizna procena stanja i trajektorije omogućava uspešno obavljanje zadataka u dinamičnim okruženjima.

Osnovni problem je integracija nesigurnih podataka iz različitih senzora u konzistentan model kretanja. Senzori kao što su GPS, kamere i LIDAR često pružaju podatke koji su podložni šumu i nepreciznostima, što komplikuje procenu stanja [2]. Napredne tehnike filtriranja, poput Kalmanovog filtera, koriste se za postizanje tačnosti u proceni pozicije i orijentacije.

2. TEORIJSKI UVOD

Fizičkim sistemom upravlja se skupom upravljačkih signala, dok se njegovi izlazi ocenjuju pomoću mernih uređaja, tako da se znanje o ponašanju sistema dobija isključivo kroz ulaze i posmatrane izlaze. Realni sistemi šuma senzora i procesa, što zahteva stohastičke modele. Kalmanov filter se koristi za procenu stanja linearnih stohastičkih sistema. Stohastički procesi su opisani sa:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + \omega_k \quad (1)$$

$$z_k = Hx_k + v_k \quad (2)$$

gde je ω_k Gausov beli šum sa kovarijansom $E[\omega_k \omega_k^T] = Q_k$ ako $l = k$, a v_k šum merenja sa kovarijansom $E[v_k v_k^T] = R_k$ ako $l = k$. Iako su matrice kovarijanse Q i R parametri za podešavanje, u praksi statistika šuma često nije poznata ili nije Gausova [3].

Algoritam Kalmanovog filtera sastoji se iz dva koraka, predikcije i korekcije. Predikcija podrazumeva procenu stanja na osnovu matematičkog modela u prostoru stanja, dok se u korekciji procenjeno stanje koriguje na osnovu merenja. Korak predikcije opisa je sa

$$\hat{x}_k^- = A\hat{x}_{k-1} + Bu_{k-1} \quad (3)$$

$$\Sigma_k^- = A\Sigma_{k-1}A^T + Q \quad (4)$$

dok je korak korekcije definisan

$$K_k = \Sigma_k^- H^T (H\Sigma_k^- H^T + R)^{-1} \quad (5)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k(z_k - H\hat{x}_k^-) \quad (6)$$

$$\Sigma_k = (I - K_k H)\Sigma_k^- \quad (7)$$

gde je $\hat{x}_k^-$ je predviđeno stanje u trenutku k , zasnovano na prethodnom stanju $\hat{x}_{k-1}$ i ulazu u_{k-1} , dok je Σ_k^- predikcija kovarijanse greške stanja, koja uzima u obzir procesni šum Q .

Kalmanov pojačivač K_k određuje koliko će novo merenje z_k uticati na korigovano stanje $\hat{x}_k$, a Σ_k predstavlja korigovanu matricu kovarijanse greške.

2.1. Algoritam proširenog kalmanovog filtera

Ukoliko je posmatrani sistem nelinearan, koristi se takozvani prošireni Kalmanov filter. Nelinearni sistem opisan je jednačinama stanja i merenja:

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k) + \omega_k \quad (8)$$

$$z_k = h(x_k) + v_k \quad (9)$$

gde su f i h nelinearne vektorske funkcije stanja i merenja. Vektori ω_k i v_k predstavljaju šum procesa i merenja sa normalnom raspodelom i kovarijansama Q i R , redom.

Da bi se primenio EKF, nelinearne funkcije f i h linearizuju se u okolini trenutnog stanja primenom razvoja u Tejlorov red

$$f(x_{k-1}) \approx f(\hat{x}_{k-1}) + A_k(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}) \quad (10)$$

gde je A_k Jakobijeva matrica funkcije f :

$$A_k = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\hat{x}_{k-1}, u_{k-1}, 0}$$

Slično tome, linearizacija funkcije merenja h je:

$$h(x_k) \approx h(\hat{x}_k) + H_k(x_k - \hat{x}_k) \quad (11)$$

NAPOMENA:

Ovaj rad proistekao je iz master rada čiji mentor je bila dr Mirna Radović, vanred. prof.

gde je H_k Jakobijeva matrica funkcije h :

$$H_k = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{\hat{x}_k}$$

Linearizovani model u prostoru stanja, glasi:

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k + \omega_k \quad (12)$$

$$z_k = H_k x_k + v_k \quad (13)$$

gde je A_k matrica prelaza stanja, H_k matrica merenja, B_k matrica koja povezuje upravljačke signale sa stanjem, ω_k šum procesa, a v_k šum merenja, [4]. Koraci estimacije prikazani su u tabeli 1

Tabela 1: Koraci proširenog Kalmanovog filtra

Korak	Formule
Predikcija stanja	$\hat{x}_k^- = f(\hat{x}_{k-1}, u_{k-1})$
Predikcija kovarijanse	$\Sigma_k^- = A_k \Sigma_{k-1} A_k^T + Q$
Kalmanovo pojačanje	$K_k = \Sigma_k^- H_k^T (H_k \Sigma_k^- H_k^T + R)^{-1}$
Korekcija stanja	$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k (z_k - H_k \hat{x}_k^-)$
Korekcija kovarijanse	$\Sigma_k = (I - K_k H_k) \Sigma_k^-$

2.2. Algoritam unscented Kalmanovog filtra

Prošireni Kalmanov filter (*EKF*) ima određena ograničenja zbog aproksimacije nelinearnih funkcija razvojem u Tejlorov red, što može dovesti do grešaka kada sistem nije skoro linearan. Osim toga, pretpostavlja se da su slučajne promenljive sa Gausovom raspodelom, što ograničava primenljivost u nekim realnim sistemima. Unscented Kalmanov filter (*UKF*) je alternativni algoritam koji omogućava bolju procenu stanja za nelinearne sisteme. Za razliku od *EKF*-a, *UKF* ne koristi linearizaciju već primenjuje *unscented* transformaciju, koja preciznije računa statistike nelinearnih funkcija, [5].

Unscented Kalmanov filter koristi $2n + 1$ sigma tačku za procenu srednje vrednosti i kovarijanse. Sigma tačke se generišu tako da zadržavaju istu srednju vrednost i kovarijansu kao originalna distribucija. One se zatim propagiraju kroz nelinearnu funkciju, što omogućava preciznu procenu izlaznih statistika.

Formulacija sigma tačaka je sledeća:

$$X_0 = \hat{x} \quad (14)$$

$$X_i = \hat{x} + \sqrt{(n + \lambda) \Sigma_{xx}}^i \quad (15)$$

$$X_{i+n} = \hat{x} - \sqrt{(n + \lambda) \Sigma_{xx}}^i \quad (16)$$

gde je λ parametar koji kontroliše raspored sigma tačaka, n je dimenzija stanja, a Σ_{xx} je kovarijansna matrica stanja. Nakon što su sigma tačke formirane, one se transformišu kroz nelinearnu funkciju i usrednjavaju da bi se dobile nove procene srednje vrednosti i kovarijanse. Težine koje se dodeljuju sigma tačkama određuju se na sledeći način:

$$W_0^{(m)} = \frac{\lambda}{n + \lambda} \quad (17)$$

$$W_0^{(c)} = \frac{\lambda}{n + \lambda} + (1 - \alpha^2 + \beta) \quad (18)$$

$$W_i^{(m)} = W_i^{(c)} = \frac{1}{2(n + \lambda)} \quad \text{za } i = 1, 2, \dots, 2n \quad (19)$$

Ovaj metod omogućava tačnu aproksimaciju do drugog reda, što ga čini znatno preciznijim u poređenju sa *EKF*-om kada je u pitanju procena stanja nelinearnih sistema. Koraci ovog algoritma prikazani su tabelom 2

Tabela 2: Koraci Unscented Kalmanovog filtra (UKF)

Korak	Opis
1. Generacija sigma tačaka	$X_0 = \hat{x}$ $X_i = \hat{x} + \sqrt{(n + \lambda) \Sigma_{xx}} \mathbf{e}_i$ $X_{i+n} = \hat{x} - \sqrt{(n + \lambda) \Sigma_{xx}} \mathbf{e}_i$
	$Y_i = f(X_i)$
	$\hat{y} = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(m)} Y_i$ $\Sigma_{yy} = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(c)} (Y_i - \hat{y})(Y_i - \hat{y})^T$
2. Korekcija	$Z_i = h(X_i)$ $\hat{z} = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(m)} Z_i$ $\Sigma_{zz} = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(c)} (Z_i - \hat{z})(Z_i - \hat{z})^T$ $\Sigma_{xz} = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(c)} (X_i - \hat{x})(Z_i - \hat{z})^T$ $K = \Sigma_{xz} \Sigma_{zz}^{-1}$ $\hat{x} = \hat{x} + K(z - \hat{z})$ $\Sigma_x = \Sigma_x - K \Sigma_{zz} K^T$

2.3. Algoritam ensemble Kalmanovog filtra

Ensemble Kalman Filter (*EnKF*) je algoritam koji koristi metode *Monte Carlo* simulacija za procenu stanja dinamičkih sistema. Umesto jednog vektora stanja i kovarijanse, *EnKF* koristi ansambl stanja koji predstavlja verovatnu raspodelu sistema. Ovaj pristup je opisan modelom koji je definisan nelinearnim diferencijalnim jednačinama:

$$x_{k+1}^{(i)} = f(x_k^{(i)}, u_k) + \omega_k^{(i)} \quad (20)$$

i mernim sistemom:

$$z_k^{(i)} = h(x_k^{(i)}) + v_k^{(i)} \quad (21)$$

gde $x_{k+1}^{(i)}$ predstavlja stanje i -tog člana ansambla u trenutku $k + 1$, dok f i h opisuju nelinearne funkcije dinamike i merenja. Šumovi procesa $\omega_k^{(i)}$ i merenja $v_k^{(i)}$ su opisani kovarijansama Q i R .

Pretpostavimo da je ansambl $x_{k-1}^{(1)}, \dots, x_{k-1}^{(N)}$ uzorak iz raspodele filtriranja u trenutku $k - 1$:

$$x_{k-1}^{(i)} \sim \mathcal{N}(\hat{x}_{k-1}, \Sigma_{k-1}) \quad (22)$$

Slično kao i kod standardnog Kalmanovog filtra, *ensemble* Kalmanov filter se sastoji od dva koraka na svakom vremenskom koraku k : korak predikcije i korak korekcije. Predikcija stanja se dobija usrednjavanjem:

$$\hat{x}_k^- = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_k^{(i)} \quad (23)$$

Analogno prethodno objašnjenim algoritmima, vrši se korekcija stanja:

$$z_k^{(i)} = h(x_k^{(i)}) + v_k^{(i)} \quad (24)$$

$$\hat{z}_k^- = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_k^{(i)} \quad (25)$$

$$\Sigma_{zz} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N [z_k^{(i)} - \hat{z}_k^-][z_k^{(i)} - \hat{z}_k^-]^\top + R \quad (26)$$

$$\Sigma_{xz} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N [x_k^{(i)} - \hat{x}_k^-][z_k^{(i)} - \hat{z}_k^-]^\top \quad (27)$$

$$K = \Sigma_{xz} \Sigma_{zz}^{-1} \quad (28)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K[z_k - \hat{z}_k^-] \quad (29)$$

$$\Sigma_k = \Sigma_k^- - K \Sigma_{zz} K^\top \quad (30)$$

3. MATEMATIČKI MODEL KRETANJA I SKUP PODATAKA

U ove svrhe stimacije putanje kretanja pokretnog objekta na osnovu zašumljenih merenja korišćen je model kretanja preuzet iz [2] i skup podataka sa merenjima preuzet sa [7].

3.1. Matematički model kretanja

Položaj objekta je određen vektorom $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix}$, gde x i y predstavljaju koordinate položaja, a θ ugao u odnosu na pozitivni pravac x -ose. Kontrola u trenutku t je $\mathbf{u}_t = \begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix}$, gde je v translatorska brzina, a ω rotaciona brzina. Ako su brzine konstantne tokom vremena Δt , objekat se kreće krivom radijusa $r = \frac{v}{\omega}$, dok se za $\omega = 0$ kreće pravolinijski. Centar kružnice je dat sa:

$$x_c = x - v \cdot \Delta t \cdot \sin \theta \quad (31)$$

$$y_c = y + v \cdot \Delta t \cdot \cos \theta \quad (32)$$

Nakon vremena Δt , objekat će biti na poziciji $\mathbf{x}_t = (x, y, \theta)^T$ sa:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_c + \frac{v}{\omega} \sin(\theta + \omega \Delta t) \\ y_c - \frac{v}{\omega} \cos(\theta + \omega \Delta t) \\ \theta + \omega \Delta t \end{pmatrix}$$

Položaj, odnosno koordinate objekta su veličine koje se direktno mere, dok se ugao θ estimira.

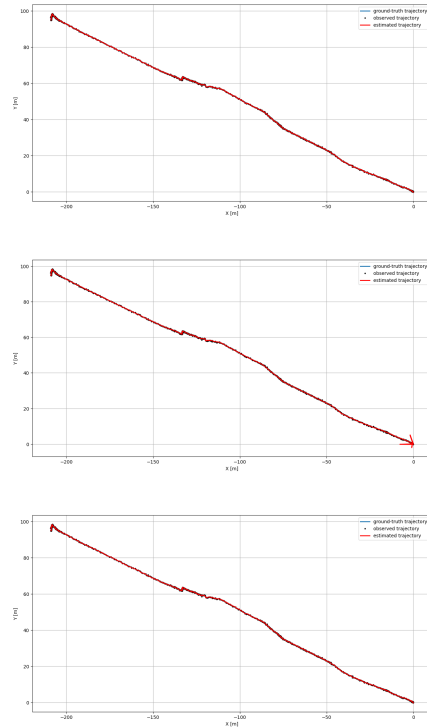
3.2. Opis skupa podataka

KITTI je značajan skup podataka za računarski vid i autonomna vozila, koji pruža video snimke, podatke o dubini, poziciji i orijentaciji vozila prikupljene visokorezolucionim kamerama i *Velodyne* laserskim skanerom, kao i *GPS* i *IMU* podatke. Obuhvata različita okruženja i može sadržati mnoge objekte kao što su automobili i pešaci, što omogućava testiranje algoritama u realističnim uslovima. *XML* fajlovi sadrže informacije o poziciji, dimenzijama i tipu vozila. Podaci su korisni za testiranje i unapređenje algoritama za detekciju, praćenje i segmentaciju [7].

4. REZULTATI

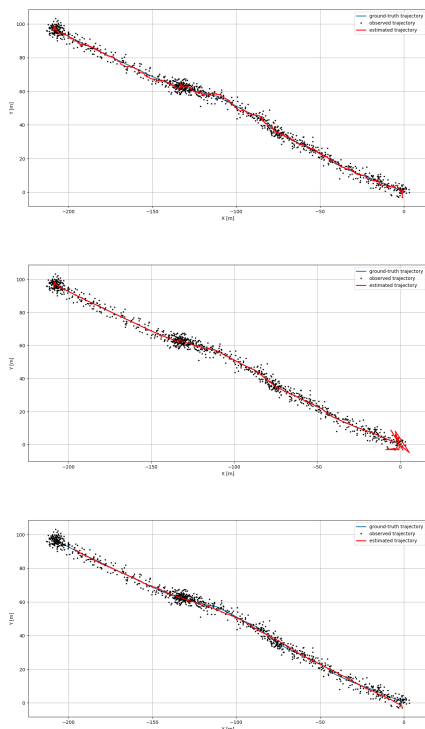
U okviru ovog rada, simulacija je sprovedena za tri različita Kalmanova filtra: prošireni Kalmanov filter, *unscented* Kalmanov filter i *ensemble* Kalmanov filter. Svaki od ovih filtara primenjen je na isti model kretanja objekta kako bi se uporedile njihove performanse u proceni putanje objekta na osnovu zašumljenih merenja. Simulacija je pokrenuta sa istim parametrima za sva tri algoritma, kako bi

se poredile performanse estimatora pod istim uslovima. Parametri koji mogu učitati na rezultat estimacije u sva tri slučaja su matrice kovarijansi $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ i Σ . Matrica $\mathbf{R}$ predstavlja kovarijansu mernih grešaka, odnosno određuje koliko poverenja imamo u merenja – manja vrednost znači veće poverenje u merenja, dok veća vrednost signalizira prisustvo većeg šuma. Matrica $\mathbf{Q}$ odnosi se na kovarijansu procesne greške, što reflektuje nesigurnost u modelu sistema – manja vrednost označava visok stepen poverenja u model, dok veća vrednost označava veću fleksibilnost filtera. Matrica Σ predstavlja kovarijansu početne procene stanja – manja vrednost ukazuje na sigurnost u početne uslove, dok veća vrednost signalizuje veću neizvesnost. Sve ove matrice zajedno utiču na to kako filter kombinuje informacije iz modela i merenja radi optimalne estimacije stanja sistema. Simulacija je sprovedena koristeći isti skup podataka i inicijalne uslove za sve metode. Cilj simulacije je bio da se uporede performanse filtera u smislu tačnosti procene stanja, stabilnosti i sposobnosti da se nosi sa različitim nivoima šuma u merenjima. Rezultati simulacije su analizirani kako bi se odredila najbolja metoda za konkretne uslove i zahteve praćenja objekta. Na slici 2 prikazani su rezultate estimacije trajektorije u slučaju da je standardna devijacija šuma merenja $\sigma = 0.15m$. Za male vrednosti šuma može se zaključiti da će sva tri algoritma dati zadovoljavajuće rezultate.



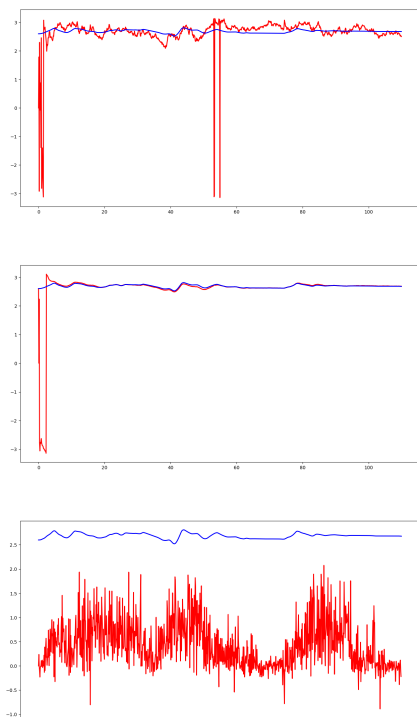
Slika 1: Poređenje rezultata estimacije upotrebom 1.EKF 2.UKF 3.EnKF, $\sigma=2m$

Slika 1 prikazuju rezultate estimacije trajektorije u slučaju da je standardna devijacija šuma merenja $\sigma = 2m$. Za razliku od slučaja kada šum merenja nije značajan, sada algoritam proširenog Kalmanovog filtra i *ensemble* Kalmanovog filtra daju znatno lošije rezultate, dok algoritam *unscented* Kalmanovog filtra daje tačne estimacije.



Slika 2: Poređenje rezultata estimacije upotrebom 1.EKF 2.UKF 3.EnKF, $\sigma=2m$

Osim estimacije koordinata objekta na osnovu zašumljenih merenja, vršena je i estimacija ugla usmerenosti na osnovu zadatog modela. Slika 3 prikazuje rezultate estimacije ugla θ . U sličaju da inicijalne vrednosti ugla nisu poznate, UKF daje jako dobre rezultate, dok EnKF ne uspeva da estimira nepoznati ugao.



Slika 3: Poređenje rezultata estimacije

5. ZAKLJUČAK

Na osnovu izvršenih eksperimenata, UKF je pokazao najbolje performanse u smislu preciznosti procene stanja u prisustvu nelinearnosti sistema sa istim yazaaditim parametrima.. Iako su EKF i EnKF postigli zadovoljavajuće rezultate, UKF je uspešno kombinovao efikasnost sa stabilnijom procenom varijacija u sistemu, što ga čini optimalnim izborom za ovaj problem estimacije trajektorije. UKF je postigao bolje rezultate u poređenju sa EnKF i EKF zbog efikasnijeg pristupa proceni stanja. EnKF koristi ensemble uzoraka za aproksimaciju kovarijanse, ali njegova tačnost zavisi od broja uzoraka, što može dovesti do većih varijacija u rezultatima kada je taj broj ograničen. U mom eksperimentu, EnKF se pokazao slabijim zbog ovih varijacija, dok je UKF, koristeći sigma tačke, dao stabilnije i preciznije rezultate, što ga čini pouzdanijim u situacijama sa nelinearnim sistemima i ograničenim brojem uzoraka. Dok EKF koristi linearnu aproksimaciju sistema pomoću Jacobian matrica, UKF koristi sigma tačke za propagaciju tačnih nelinearnih transformacija stanja i kovarijanse. Ovaj pristup omogućava bolju procenu distribucije stanja, smanjujući greške koje nastaju usled linearizacije.

6. LITERATURA

- [1] T. Omeragic, J. Velagic, "Tracking of moving objects based on extended Kalman filter," Faculty of Electrical Engineering, Sarajevo, 2020.
- [2] S. Thrun, W. Burgard, D. Fox, "Probabilistic Robotics," Cambridge, MA, MIT Press, 2005.
- [3] P. S. Maybeck, "The Kalman Filter: An Introduction to Concepts," Autonomous Robot Vehicles, 1990.
- [4] G. A. Terejanu, "Extended Kalman Filter Tutorial," Department of Computer Science and Engineering, University at Buffalo, 2024.
- [5] S. J. Julier, J. K. Uhlmann, "A New Extension of the Kalman Filter to Nonlinear Systems," *Proceedings of AeroSense: The 11th International Symposium on Aerospace/Defense Sensing, Simulation and Controls*, pp. 182–193, 1997.
- [6] M. Katzfuss, J. R. Stroud, C. K. Wikle, "Understanding the Ensemble Kalman Filter," Department of Statistics, Texas A&M University, College Station, TX, USA; Department of Statistics, George Washington University, Washington DC, USA; Department of Statistics, University of Missouri, Columbia, MO, USA, 2016.
- [7] https://www.cvlibs.net/datasets/kitti/raw_data.php?type=city (pristupljeno u avgustu 2024.)

Kratka biografija:



Anastasija Golić Rođena je u Jagodini 2000.god. Master rad na Fakultetu tehničkih nauka iz oblasti Računarstva i autmatike odbranila je 2024. god.

Kontakt: golicanastasija@gmail.com