

**ОПТИМАЛНО УПРАВЉАЊЕ СИСТЕМИМА НЕЦЕЛОГ РЕДА УЗ
АЛГЕБАРСКА ОГРАНИЧЕЊА****OPTIMAL CONTROL OF FRACTIONAL-ORDER SYSTEMS WITH
ALGEBRAIC CONSTRAINTS**

Николина Живановић, Факултет техничких наука, Нови Сад

Област – ЕЛЕКТРОТЕХНИКА И РАЧУНАРСТВО

Кратак садржај – Овај рад је у потпуности посвећен проблемима оптималног управљања, код којих је процес описан фракционим диференцијалним једначинама, а компоненте вектора управљања трпе алгебарска ограничења. Анализом модела континуалног реактора и ХИВ инфекције, пружен је увид у примену теорије оптималног управљања. Примењен је поступак претварања нецелих диференцијалних једначина у обичне, ослањајући се на теорију Атанацковића и Станковића, и израчунато је управљање са алгебарским ограничењем користећи теорију Л. С. Понтрјагина. На крају, Хамилтонова функција је оптимизована нумерички. Теоријске основе потврђене су симулацијама.

Кључне речи: Системи нецелог реда, Експанзиона формула за фракциони извод, Оптимално управљање

Abstract - This work is entirely dedicated to the problems of optimal control where the process is described by fractional differential equations, and the control vector components are subject to algebraic constraints. Through the analysis of two models—a continuous reactor with mixing and a mathematical model of HIV infection—insights into the application of optimal control theory are provided. A multi-step procedure is applied to convert fractional differential equations into ordinary differential equations, relying on the theory of Atanacković and Stanković, and to compute control with algebraic constraints using L.S. Pontryagin's theory. Finally, the Hamiltonian function is numerically optimized. The theoretical foundations of this study are validated through numerical simulations.

Keywords: Fractional order systems, Expansion formula for fractional derivative, Optimal control

1. УВОД

Проблеми оптималног управљања са ограничењима над управљачким променљивим су сложени чак

НАПОМЕНА:

Овај рад проистекао је из мастер рада чији ментор је био проф. др Зоран Д. Јеличић.

и када је систем описан обичним диференцијалним једначинама. Иако постоје моћни нумерички алгоритми, израчунавање оптималне стратегије за нецеле изводе зависи од реда извода и постаје једноставније ако је он близак целом. У раду су разматрана два примера оптималног управљања са алгебарским ограничењима: модел континуалног реактора са мешањем (*Continuous Stirred Tank Reactor* - CSTR) и модел ХИВ инфекције, који је због своје сложености централни пример и главни предмет истраживања овог рада. Оба су илустративна са становишта нумеричке студије, а према сазнањима аутора модели које смо користили нису досад разматрани у фракционом облику у литератури.

2. ОСНОВЕ ФРАКЦИОНОГ РАЧУНА

Фракциони рачун обухвата изводе и интеграле у нецелим степенима као што су $\frac{1}{2}$ или $1 + 2j$, познате као фракциони оператори. У овом раду акценат је на Риман-Љувиловом приступу, док је Капуто предложио алтернативу због недостатака тог приступа. Гринвалд-Летњиковљев метод заснован на коначним разликама је еквивалентан Риман-Љувиловом у одређеним условима и важан је за апроксимацију фракционих оператора у нумеричким алгоритмима. Поред “левих” оператора, у варијационом рачуну и оптималном управљању користе се и “десни” фракциони оператори. Заинтересованог читаоца упућујемо на литературу [1], где су дефинисани сви горе наведени оператори и изведене њихове особине. Риман-Љувилов извод дефинисан је као

$${}_0D_t^\alpha f = \frac{d^{n(\alpha)}}{dt^{n(\alpha)}} {}_0I_t^{n(\alpha)-\alpha} f. \quad (1)$$

За $0 < \alpha < 1$ следи

$${}_0D_t^\alpha f = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau. \quad (2)$$

Фракциони изводи су важни јер су дефинисани преко интеграла и узимају у обзир не само непосредну околину око тачке, већ и све претходне тачке.

2.1. Декомпозиција Атанацковића и Станковића

Декомпозиција је кључна за наш начин решавања проблема оптималног управљања системима описаним фракционим диференцијалним једначинама,

омогућавајући претварање у систем обичних диференцијалних једначина првог реда. Одабир довољног броја елемената у реду је важан и у нашем раду постигнут је емпиријски кроз симулације.

Представићемо експанзиону форму за фракциони извод реда $\alpha \in (0, 1)$, предложену од Атанацковића и Станковића. Формула омогућава развој фракционог извода функције као линеарну комбинацију функције и њених момента, где су коефицијенти функције времена. Крајњи израз је представљен у [3, 2, 1].

Решење диференцијалне једначине са фракционим изводом своди се на интеграцију система диференцијалних једначина првог реда. За добијање задовољавајућих резултата често је довољно решити мали број тих једначина. Апроксимација експанзионе формуле је дата као

$${}_0D_t^\alpha f \approx \frac{A_{N_2}(\alpha)}{t^\alpha} f(t) + \sum_{i=2}^{N_2} \frac{B(\alpha, i)}{t^{i-1+\alpha}} \tilde{W}_i(t), \quad (3)$$

где су:

$$A_{N_2}(\alpha) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} - \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\Gamma(\alpha-1)} \sum_{i=2}^{N_2} \frac{\Gamma(i-1+\alpha)}{(i-1)!}, \quad (4)$$

$$B(\alpha, i) = -\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\Gamma(\alpha-1)} \frac{\Gamma(i-1+\alpha)}{(i-1)!}, \quad (5)$$

а помоћне променљиве $W_i(t)$ се добијају решавањем Кошијевог проблема:

$$\dot{W}_i = -(i-1)t^{i-2}f(t), \quad (6)$$

$$W_i(0) = 0. \quad (7)$$

Задовољавајуће апроксимације се постижу са N_2 у опсегу од 7 до 20. Када се ред фракционог извода приближи целобројној вредности, као за $\alpha = 0.1$ или $\alpha = 0.9$, или када је коефицијент уз фракциони члан мали, обично је потребно додати мањи број додатних чланова, често је довољно 3 до 5 додатних чланова за проблем оптималног управљања, [1].

3. ОПТИМАЛНО УПРАВЉАЊЕ УЗ АЛГЕ-БАРСКА ОГРАНИЧЕЊА

У овом раду фокусирали смо се на релејно (енг. *bang-bang*) управљање, које подразумева укључивање или искључивање управљања уместо постепене промене. Код релејног управљања, вредности управљачког вектора могу имати само две крајње вредности – горњу или доњу границу, уз коначан број прелазних тачака током интервала. Односно $\forall t$ важи

$$u_{min} \leq u(t) \leq u_{max}. \quad (8)$$

Релејно управљање се постиже уколико се критеријум оптималности формира тако да из њега произилази Хамилтонијан који линеарно зависи од управљачке променљиве. Један пример таквог критеријума оптималности, по угледу на [1], би био

$$J = \int_0^T \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + R u(t) \right\} dt, \quad (9)$$

где смо због једноставности претпоставили да се управљање врши путем једне променљиве, односно да је управљачка променљива скалар. Уколико је процес описан математичким моделом

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)u(t); \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (10)$$

тада је по Понтрјагиновом принципу максимума Хамилтонијан

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, u) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + R u + \mathbf{p}^T (\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} u), \quad (11)$$

где са $\mathbf{p}$ означавамо придружену функцију (генерализовани импулс). Даље се поступак оптимизације своди на минимизацију Хамилтонијана. Одатле произилазе канонске једначине које представљају потребне услове екстремума

$$\dot{x}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \quad \wedge \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i}, \quad (12)$$

при чему је $i = 1, \dots, n$, где је n димензионалност вектора стања. Уз то имамо и природне граничне услове

$$x_i(0) = \alpha_i \quad \wedge \quad p_i(T) = 0. \quad (13)$$

Понтрјагинов принцип максимума налаже да је оптимално управљање оно које Хамилтоновој функцији (11) саопштава минимум. Хамилтонијан се може написати на следећи начин

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, u) = (\mathbf{p}^T \mathbf{B} + R) u + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{p}^T \mathbf{A} \mathbf{x}, \quad (14)$$

одакле се дефинише оптимално управљање

$$u^*(t) = \begin{cases} u_{min} & , \mathbf{p}^T \mathbf{B} + R > 0, \\ произвољно & , \mathbf{p}^T \mathbf{B} + R = 0, \\ u_{max} & , \mathbf{p}^T \mathbf{B} + R < 0. \end{cases} \quad (15)$$

Поступак проналажења оптималног управљања подразумева решавање двотачкастог граничног проблема.

4. АЛГОРИТАМ НУМЕРИЧКЕ ОПТИМИЗАЦИЈЕ

Задатак који решавамо је двотачкасти гранични проблем, где су за променљиве стања познати почетни услови, а за придружене крајњи. Нумеричка метода коришћена у овом раду је метод напред-назад *FBSM* (енг. *Forward-Backward Sweep Method*), који обухвата следеће кораке:

1. Дефинисање почетних вредности за променљиве стања, уз крајње вредности за придружене променљиве постављене на нулу. Почетна претпоставка за управљачке променљиве је нула.

2. У свакој итерацији, текућа вредност променљивих стања се одређује на основу претходне, што представља пропагацију унапред.

3. Пропагацијом уназад, у свакој итерацији се одређују текуће вредности придружених променљивих на основу њихове наредне вредности.

4. На основу ажурираних вредности променљивих стања и придружених променљивих, добијају се нове вредности за управљачке променљиве $u_{new}(t)$.

5. За континуална управљања, могуће је користити $u(t) = u_{new}(t)$, али то често није довољно за постизање конвергенције.

6. Проверава се конвергенција. Ако су све израчунате променљиве унутар одређене толеранције у односу на претходну итерацију, прихватимо их као конвергентне, а у супротном се враћамо на 2. корак.

На конвергенцију нумеричких решења за оптимално управљање утичу почетна претпоставка, критеријуми за конвергенцију, ажурирање управљања и тежински коефицијенти. У овом раду коришћена је почетна претпоставка $u \equiv 0$. Конвергенција се проверава на основу релативне разлике:

$$\frac{|u_{updated} - u_{old}|}{|u_{updated}|} \leq \epsilon, \quad (16)$$

где је ϵ релативна толеранција. Прилагођени критеријум је:

$$\epsilon \sum_{i=1}^n |u_{updated}(i\Delta t)| - \sum_{i=1}^n |u_{updated}(i\Delta t) - u_{old}(i\Delta t)| \geq 0. \quad (17)$$

Ажурирање управљања се врши као тежинска комбинација старог и новог управљања:

$$u_{updated} = \omega u_{old} + (1 - \omega) u_{new}, \quad (18)$$

где ω зависи од типа управљања и модела. Веће ω повећавају шансе за конвергенцију, али захтевају више итерација, док мање ω брже мењају управљање, али могу отежати конвергенцију.

5. РЕЗУЛТАТИ НУМЕРИЧКИХ СИМУЛАЦИЈА

У овом поглављу представимо основне резултате нумеричких симулација оптималног управљања модела. Прво разматрамо оптимизацију четири управљачке променљиве хемијског реактора ради максимизације економског добитка. Систем обухвата четири хемијске реакције у изотермалном континуално мешаном реактору (*CSTR*) [4], са контролним променљивим протока и уносом енергије. У модел је унет фракциони извод реда $\alpha \in (0, 1)$ у једну од једначина стања како би се анализирао утицај параметра α на оптимизацију.

$$\begin{aligned} \max_{u_1, u_2} J = \int_0^{0.2} & \left[5.8(qx_1 - u_4) - 3.7u_1 - 4.1u_2 \right. \\ & + q(23x_4 + 11x_5 + 28x_6 + 35x_7) \\ & \left. - 5u_3^2 - 0.099 \right] dt \end{aligned} \quad (19)$$

$$\dot{x}_1 = u_4 - qx_1 - 17.6x_1x_2 - 23x_1x_6x_3 \quad (20)$$

$$\dot{x}_2 = u_1 - qx_2 - 17.6x_2 - 146x_2x_3 \quad (21)$$

$$\dot{x}_3 + k_1 D_t^\alpha x_3 = u_2 - qx_3 - 73x_3^2 \quad (22)$$

$$\dot{x}_4 = 35.2x_1x_2 - 51.3x_3x_4 \quad (23)$$

$$\dot{x}_5 = qx_5 + 219x_7x_3 - 51.3x_2x_5 \quad (24)$$

$$\dot{x}_6 = 102.6x_3 - 146x_1x_6x_3 \quad (25)$$

$$\dot{x}_7 = qx_7 + 46x_1x_6x_3 \quad (26)$$

$$q = u_1 + u_2 + u_4 \quad (27)$$

$$0 \leq u_1 \leq 20 \quad (28)$$

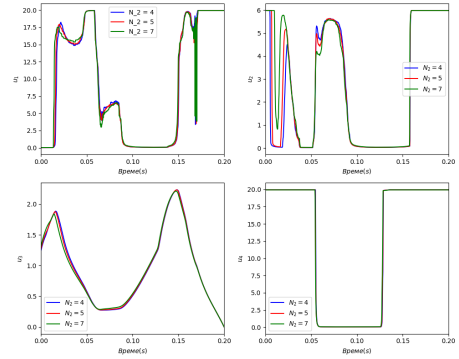
$$0 \leq u_2 \leq 6 \quad (29)$$

$$0 \leq u_3 \leq 4 \quad (30)$$

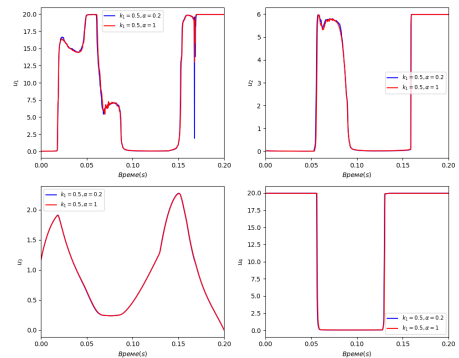
$$0 \leq u_4 \leq 20 \quad (31)$$

$$t_f = 0.2 \quad (32)$$

На слици 1 разматрамо случај $\alpha = 0.5$ и $k_1 = 1$, где не долази до значајнијих разлика у резултатима, осим код управљања $u_2(t)$.



Слика 1: Оптималне управљачке променљиве за математички модел *CSTR*, када је параметар $\alpha = 0.5$.



Слика 2: Оптималне управљачке променљиве за математички модел *CSTR*, када је параметар $N_2 = 4$.

Кроз тестирања, закључили смо да увођење оператора фракционог извода не доводи до великих промена у решењу, као што се види на слици 2. За симулације смо користили $\omega = 0.995$ и $\epsilon = 10^{-3}$. Управљање $u_4(t)$ је већ *bang-bang*, док $u_1(t)$ и $u_2(t)$ захтевају још итерација.

Други модел је фракциони модел ХИВ инфекције (по угледу на [5]), математички записан као

$$\dot{x} = \lambda - d_1 x - \frac{k_1(1-u_1)xv}{x+v} \quad (33)$$

$$\dot{s} = \frac{k_1(1-u_1)xv}{x+v} - d_2 s - k_2 s \quad (34)$$

$$\dot{y} = k_2 s - d_3 y - p y z \quad (35)$$

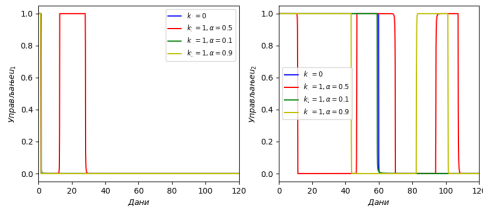
$$\dot{v} = a(1-u_2)y - d_4 v \quad (36)$$

$$\dot{z} + k_0 D_t^\alpha z = c y z - b z, \quad (37)$$

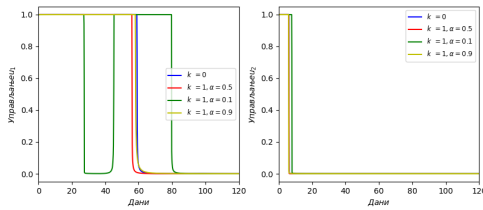
за познате почетне услове. Критеријумска функција, коју је потребно минимизовати, формулише се у складу са минимизацијом трошкова лечења и концентрација инфицираних ћелија

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \{Q_1 s^2(t) + Q_2 y^2(t) + Q_3 v^2(t) + A_1 u_1(t) + A_2 u_2(t)\} dt, \quad (38)$$

где t_f представља трајање терапије. Параметри A_1 , A_2 представљају губитке (финансијске и физиолошке) услед примене терапија. Оптималним управљањем ћемо постићи жељене резултате. Закључили смо да систем увек конвергира ка незараженом еквилибријуму, независно од комбинације параметара. Утицај параметара на управљање види се на сликама 3 и 4.



Слика 3: Оптимално релејно управљање у функцији времена. Тежински параметри: $A_1 = A_2 = 5$, $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 1$, $N_2 = 5$.



Слика 4: Оптимално релејно управљање у функцији времена. Тежински параметри: $A_1 = 1$, $A_2 = 7$, $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 1$, $N_2 = 5$.

6. ЗАКЉУЧАК

У овом раду истражен је проблем оптималног управљања за нелинеарне системе описане обичним и фракционим диференцијалним једначинама. Кроз примену на моделе континуалног хемијског реактора и ХИВ инфекције, показано је да фракциони модели омогућавају репрезентативније описе динамике сложених система. Истраживање примене оптималног управљања на фракционе моделе показало је да је алгоритам *Forward Backward Sweep*

Method користан за решавање двотачкастих граничних проблема. Конвергенција у случају *bang-bang* управљања је била изазовнија у поређењу са континуалним управљањем, али подешавање параметара и већи број итерација могу довести до задовољавајућих решења. Поред тога у поступку оптимизације, примењен је принцип декомпозиције Атанацковића и Станковића који олакшава решавање диференцијалних једначина нецелог реда, трансформишући их у систем обичних диференцијалних једначина првог реда. Нумеричке симулације оптималног управљања показале су да комбинована терапија значајно побољшава резултате лечења, повећавајући ниво неинфицираних CD4+ Т-ћелија и смањујући концентрацију инфицираних и латентно инфицираних ћелија. Прекид терапије доводи до поновног активирања инфекције, што наглашава значај доследне терапије.

Литература

- [1] M. R. Rapaić, "Optimalno i suboptimalno upravljanje klasom sistema sa raspodeljenim parametrima", PhD thesis, Fakultet tehničkih nauka u Novom Sadu, Novi Sad, 2011.
- [2] Z. D. Jeličić and N. Petrovacki, "Optimality conditions and a solution scheme for fractional optimal control problems", *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 38, No. 6, pp. 571-581, 2008, Springer, doi:10.1007/s00158-008-0307-7.
- [3] T. Atanacković and B. Stanković, "An Expansion Formula for Fractional Derivatives and its Application", *Fractional Calculus and Applied Analysis*, Vol. 7, No. 3, pp. 365-378, 2004, Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences, <http://eudml.org/doc/11253>.
- [4] E. Balsa-Canto, et al., "Dynamic optimization of chemical and biochemical processes using restricted second-order information", *Computers & Chemical Engineering*, Vol. 25, No. 4-6, pp. 539-546, 2001, Elsevier, doi:10.1016/s0098-1354(01)00633-0.
- [5] J. Danane and K. Allali, "Optimal control of an HIV model with CTL cells and latently infected cells", *Numerical Algebra, Control & Optimization*, Vol. 10, No. 2, pp. 207-225, 2020, doi:10.3934/naco.2019048.

Кратка биографија:



Николина Живановић рођена је у Зворнику 2000. год. Мастер рад на Факултету техничких наука из области Електротехнике и рачунарства - Оптимално управљање системима нецелог реда уз алгебарско ограничење одбранила је 2024. год.
Контакт: zivanovic.nikolina@uns.ac.rs