

MODELOVANJE MEMRISTORA KORIŠĆENJEM TEORIJE HISTEREZISA**MODELING OF MEMRISTORS USING HYSTERESIS THEORY**Stojanka Bratić, *Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad***Oblast – ELEKTROTEHNIKA I RAČUNARSTVO**

Kratak sadržaj – U ovom radu je predstavljena veza između postojanja klasične histerezijske petlje u fluks-naelektrisanje ravni, i uštinute histerezijske petlje u naponsko-strujnoj ravni memristora.

Ključne reči: memristor, histerezis, Takačev model

Abstract – This paper presents a relationship between the existence of classical hysteresis loop in the flux-charge plane, and pinched hysteresis loop in the voltage-current plane of memristor.

Keywords: memristor, hysteresis, Takacs model

1. UVOD

U ovom radu je prikazana povezanost između postojanja klasične histerezijske petlje (eng. *Hysteresis Loop*, kratko HL) u fluks-naelektrisanje ravni memristora, i uštinute histerezijske petlje (eng. *Pinched Hysteresis Loop*, kratko PHL) u naponsko-strujnoj ravni memristora. PHL u u - i ravni predstavlja jedan od „otisaka prstiju“ (eng. *fingerprints*) memristora, kada je njegova pobuda neparna periodična funkcija čija je srednja vrednost jednaka nuli.

Histerezis predstavlja složenu nelinearnost (eng. *compound nonlinearity*) koja se pojavljuje u mnogim inženjerskim domenima, ili bistabilnost u radu različitih uređaja od inženjerskog interesa. U literaturi se mogu sresti HL-ovi različitih oblika: „klasičan“ (dve pomerene sigmoidalne funkcije koje se seku), kružni, elipsoidni, kvadratni, pravougaoni, u obliku romba i romboida.

U ovom radu je razmatran klasičan histerezis, a za njegovo modelovanje je korišćen Takačev model histerezisa. Kao specijalni slučajevi ovog histerezisa se za odgovarajući izbor parametara mogu dobiti i histerezisi u obliku kvadrata, pravougaonika, romba i romboida.

Teorija histerezisa je dobro utemeljena i razvijena oblast. Sa druge strane, uštinuta histerezijsna petlja, mora pre svega biti histerezijsna petlja, kako to njeno ime sugeriše. Začudjuće, veze između HL-a i PHL-a nema u dostupnoj literaturi, prema našim najboljim saznanjima. Glavni rezultat rada je uspostavljanje veze između analitičkih izraza za HL modelovan Takačevim modelom, i odgovarajućeg PHL-a. Rezultat je matematički izveden u kontekstu modelovanja memristora.

NAPOMENA:

Ovaj rad proistekao je iz master rada čiji mentor je bio dr Staniša Dautović, vanr. prof.

2. MEMRISTOR – POTREBNE DEFINICIJE I POJMOVI

Memristori su definisani konstitutivnom relacijom $F(q, \varphi)$ u naelektrisanje-fluks ravni. Konstitutivna relacija idealnog memristora je definisana u φ - q ravni nekom nelinearnom funkcijom,

$$F(\varphi, q) = 0, \quad (1)$$

gde su

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_{t_0}^t v(t) dt, \quad q(t) = q_0 + \int_{t_0}^t i(t) dt. \quad (2)$$

U prethodnom izrazu, φ_0 i q_0 su početne vrednosti fluksa i naelektrisanja, respektivno, u početnom trenutku $t = t_0$.

Za memristor se kaže da je kontrolisan naelektrisanjem ako je njegova konstitutivna relacija iskazana u obliku $\varphi=f(q)$ [1]. Dualno, za memristor se kaže da je kontrolisan fluksom ako je njegova konstitutivna relacija iskazana u obliku $q=f(\varphi)$.

Relacija koja povezuje napon i struju memristora glasi

$$u=Mi, \quad (3)$$

gde M označava memristansu memristora, $M=d\varphi/dq>0$. Često se umesto simbola M u radovima sreće simbol R (otpornost zavisna od promenljive stanja), budući da je fizička jedinica za memristansu takođe Ω . Ekvivalentno, veza između struje i napona može se iskazati kao

$$i=Wu, \quad (4)$$

gde W označava memduktansu memristora, $W=dq/d\varphi=1/M>0$. Često se umesto simbola W u radovima sreće simbol G (provodnost zavisna od promenljive stanja), čija je fizička jedinica Simens, u oznaci [S]. Iz relacija (3) i (4) je očigledno da napon i struja na memristoru moraju biti istovremeno jednaki nuli.

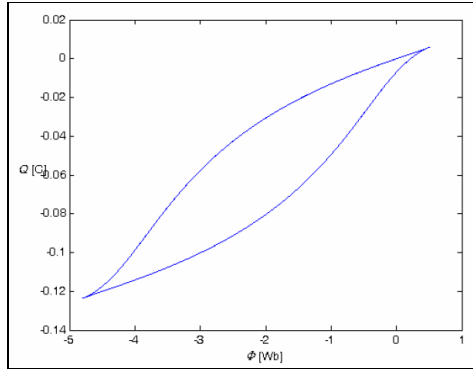
Iz praktičnih razloga potrebno je da model memristora bude kontrolisan ili strujom ili naponom. Za memristor priključen na strujnu pobudu kaže se da je kontrolisan strujom, dok se za memristor priključen na naponsku pobudu kaže da je kontrolisan naponom. U savremenoj literaturi, memristori se klasifikuju u četiri grupe: idealni, idealni generički, generički i prošireni [1].

3. PRIMERI HISTEREZISA U FLUKS-NAELEKTRISANJE RAVNI MEMRISTORA

Nelinearnost (1) ne mora biti jednoznačna funkcija, već može biti i složena nelinearnost, tj. histerezis. Histerezisi kod memristora su u dostupnoj literaturi uočeni u različitim ravnima od interesa: φ - q , R - i , R - u , G - i , G - u . Ovde će kao motivišući primeri biti navedeni samo neki

među njima, tj. oni gde se klasičan histerezis javlja u φ - q ravni.

Primer 1 iz [2] i [3]: Termistor. Tangencijalna PHL u i - u ravni, samopresecajuća „leptir“ PHL u G - u ravni, klasični HL u q - φ ravni, koji je prikazan na Slici 1.



Slika 1. HL u q - φ ravni termistora.

Primer 2 iz [4]: Gas discharge lamp, inverzna HL u φ - q ravni, prikazana na Slici 2.

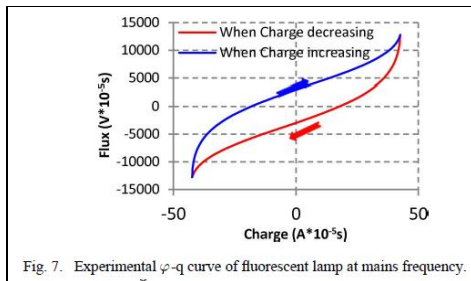
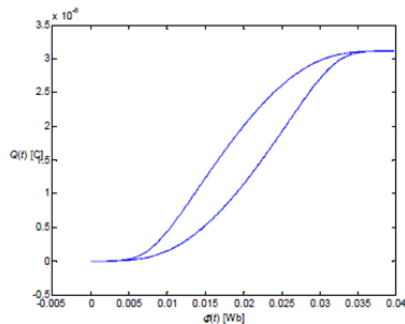


Fig. 7. Experimental φ - q curve of fluorescent lamp at mains frequency.

Slika 2. Inverzna HL u φ - q ravni (preuzeto iz [4]).

Primer 3 iz [5]: Generalizovani memristor, PHL u obliku „vesla“ u i - u ravni. Odgovarajući klasičan HL u q - φ ravni nije prikazan u originalnom članku [5], ali je u ovom radu softverski modelovan i prikazan na Slici 3.



Slika 3. HL u φ - q ravni memristivnog diodnog mosta kaskadno povezanog sa RLC filtrom.

4. TAKAČEV MODEL HISTEREZISA

Takačev model [6] je baziran na $T(x)$ funkciji, koja je definisana kao linearna kombinacija tangens hiperbolične funkcije i linearne funkcije:

$$T(x) = B_0 \tanh(C_0 x + A_0 x). \quad (5)$$

Da bi se opisale grane simetrične HL, hiperbolični deo $T(x)$ funkcije je transliran horizontalno (ili desno ili levo za a_0) i vertikalno (ili gore ili dole za b_1). Uzlazna grana $f_+^{A_0}$ za rastuće vrednosti x je opisana sa

$$f_+^{A_0}(x) = B_0 \tanh(C_0(x - a_0)) + A_0 x + b_1, \quad (6)$$

dok je silazna grana $f_-^{A_0}$ za opadajuće vrednosti x opisana sa

$$f_-^{A_0}(x) = B_0 \tanh(C_0(x + a_0)) + A_0 x - b_1. \quad (7)$$

U kontekstu magnetskih materijala, parametar A_0 u izrazima (6) i (7) se odnosi na reverzibilnu magnetizaciju, i može biti iskorišćen da „iskosi“ HL. U razmatranjima koja slede, koeficijent A_0 je postavljen na nulu. Za $A_0 = 0$, izrazi (6) i (7) prelaze u

$$f_+(x) = B_0 \tanh(C_0(x - a_0)) + b_1, \quad (8)$$

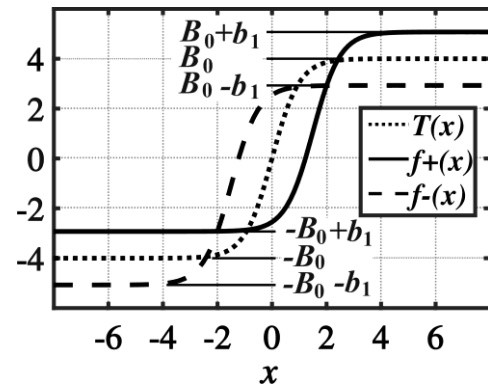
$$f_-(x) = B_0 \tanh(C_0(x + a_0)) - b_1. \quad (9)$$

Kod zatvorenih HL, grane imaju dve zajedničke tačke na vrhovima („špicevima“) histerezisa. Za periodičnu pobudu $x = x(t)$, sa nultom srednjom vrednošću i $-X_m \leq x \leq X_m$, vrhovi se pojavljuju za $x = \pm X_m$. Simetrična HL je zatvorena kada je $f_+(X_m) = f_-(X_m)$.

Ova relacija se može rešiti po b_1 :

$$b_1 = \frac{B_0}{2} [\tanh(C_0(X_m + a_0)) - \tanh(C_0(X_m - a_0))]. \quad (10)$$

Primer klasične zatvorene HL je prikazan na Slici 4.



Slika 4. Primeri funkcija $T(x)$, $f_+(x)$ i $f_-(x)$ za vrednost parametara $A_0=0$, $B_0=4$, $C_0=1$, $a_0=1.5$, $X_m=2$.

5. VEZA IZMEĐU HL-a I PHL-a

U ovom delu će biti uspostavljena veza između postojanja HL-a u φ - q ravni memristora, i pojave PHL-a u u - i ravni istog memristora. Izvođenje će biti dato na primeru strujom kontrolisanog memristora. Kako kod strujom kontrolisanog memristora pobuda mora biti nezavisni vremenski promenljiv strujni generator, čiji je talasni oblik periodična funkcija koja je neparna i sa srednjom vrednošću jednakom nuli, izvođenje je sprovedeno za sinusni talasni oblik generatora, $i_g(t) = I_m \sin(\omega t)$. U tom slučaju, na osnovu (2) naelektrisanje je jednako

$$q(t) = q_0 - \frac{I_m}{\omega} (1 - \cos \omega t), \quad (11)$$

gde je q_0 početni uslov. U izvođenjima će nam biti potrebni prvi i drugi izvod naelektrisanja, koji su tada

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = I_m \sin \omega t, \quad (12)$$

$$\frac{d^2 q(t)}{dt^2} = I_m \cdot \omega \cdot \cos \omega t. \quad (13)$$

Histerezisnu petlju, $\varphi(q(t))$, možemo opisati pomoću Takačevog modela histerezisa i Hevisajdove funkcije $h(\cdot)$,

$$\varphi(q(t)) = f_+(q(t))h\left(\frac{dq(t)}{dt}\right) + f_-(q(t))h\left(-\frac{dq(t)}{dt}\right). \quad (14)$$

U slučaju kada je HL u φ - q ravni, i kada je q dato sa (11), parametar b_1 (10) se može izračunati iz preseka dve grane histerezisa, u dve tačke (dva “špica histerezisa”) u kojima je $f_+(q(t)) = f_-(q(t))$. U desnoj gornjoj presečnoj tački za b_1 dobijamo

$$b_1 = \frac{B_0}{2} \left(\tanh(C_0(q_0 + a_0)) - \tanh(C_0(q_0 - a_0)) \right), \quad (15)$$

a u donjoj levoj presečnoj tački

$$b_1 = \frac{B_0}{2} \left(\tanh\left(C_0\left(q_0 - \frac{2I_m}{\omega} + a_0\right)\right) - \tanh\left(C_0\left(q_0 - \frac{2I_m}{\omega} - a_0\right)\right) \right), \quad (16)$$

odakle sledi da početni uslov mora biti $q_0 = I_m/\omega$ da bi histerezisna petlja bila simetrična i zatvorena.

Izvod po vremenu jednačine (14) daje

$$\begin{aligned} u(t) = \frac{d\varphi(q(t))}{dt} &= \frac{d}{dq} f_+(q(t)) \frac{d}{dt} q(t) \cdot h\left(\frac{d}{dt} q(t)\right) + \\ &+ f_+(q(t)) \delta\left(\frac{d}{dt} q(t)\right) \frac{d^2}{dt^2} q(t) + \\ &+ \frac{d}{dq} f_-(q(t)) \frac{d}{dt} q(t) \cdot h\left(-\frac{d}{dt} q(t)\right) - \\ &- f_-(q(t)) \delta\left(-\frac{d}{dt} q(t)\right) \frac{d^2}{dt^2} q(t), \end{aligned} \quad (17)$$

gde su $h(\cdot)$ i $\delta(\cdot)$ oznake za Hevisajdovu i Dirakovu funkciju, respektivno. Iz prethodnog izraza, izdvojimo sabirke koji sadrže Dirakove impulse,

$$\begin{aligned} D &= f_+(q(t)) \delta\left(\frac{d}{dt} q(t)\right) \frac{d^2}{dt^2} q(t) - \\ &- f_-(q(t)) \delta\left(-\frac{d}{dt} q(t)\right) \frac{d^2}{dt^2} q(t). \end{aligned} \quad (18)$$

U onome što sledi, pokazaćemo da je izraz (18) jednak nuli. U izrazu (18) se javljaju Dirakovi impulsi složene funkcije, koji se izračunavaju na sledeći način

$$\delta(f(t)) = \sum_{t_k} \frac{1}{\left| \frac{d}{dt} f(t) \right|_{t=t_k}} \cdot \delta(t - t_k), \quad (19)$$

gde su t_k nule funkcije $f(t)$, tj. $f(t_k) = 0$.

Korišćenjem osobine parnosti Dirakovog impulsa, $\delta(x) = \delta(-x)$, i osobine (19), za $f(t) = q(t) = I_m \sin(\omega t)$ sledi

$$\begin{aligned} \delta\left(\frac{d}{dt} q(t)\right) &= \delta\left(-\frac{d}{dt} q(t)\right) = \delta(I_m \sin \omega t) = \\ &= \sum_{t_k} \frac{1}{\left| \frac{d}{dt} I_m \sin \omega t \right|_{t=t_k}} \cdot \delta(t - t_k). \end{aligned} \quad (20)$$

U prethodnom izrazu (20), trenuci t_k predstavljaju nule funkcije $I_m \sin \omega t$, kojih ima beskonačno mnogo,

$$I_m \sin \omega t = 0 \rightarrow t_k = 0, \pm \frac{\pi}{\omega}, \pm \frac{2\pi}{\omega}, \dots = \frac{k\pi}{\omega}; k \in \mathbb{Z}. \quad (21)$$

Uvrštavajući (21) u (20), (20) dobija oblik

$$\begin{aligned} \delta\left(\frac{dq(t)}{dt}\right) &= \sum_{t_k} \frac{1}{\left| I_m \omega \cos \omega t \right|_{t=t_k}} \cdot \delta(t - t_k) = \\ &= \frac{1}{I_m \omega} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{k\pi}{\omega}\right). \end{aligned} \quad (22)$$

Koristeći (22) i (13), izraz (18) se može predstaviti

$$\begin{aligned} D &= \delta\left(\frac{dq(t)}{dt}\right) \frac{d^2 q(t)}{dt^2} (f_+(q(t)) - f_-(q(t))) = \\ &= \frac{I_m \omega \cos \omega t}{I_m \omega} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{k\pi}{\omega}\right) \right) (f_+(q(t)) - f_-(q(t))). \end{aligned} \quad (23)$$

U izvođenju nam je potrebna osobina odabiranja Dirakovog impulsa,

$$f(t) \delta(t - T) = f(T) \delta(t - T) \quad (24)$$

u tačkama $t_i = T = \text{const}$. Označimo razliku pozitivne i negativne grane histerezisa u (23) sa $f(q(t))$,

$$f(q(t)) = f_+(q(t)) - f_-(q(t)). \quad (25)$$

Koristeći (24) i (25), jednačina (23) postaje

$$D = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{k\pi}{\omega}\right) \right) \left(\cos \omega t \cdot f(q(t)) \right)_{t=t_k}. \quad (26)$$

Razlika pozitivne i negativne grane histerezisa (25) u tačkama odabiranja t_k jednaka je

$$\begin{aligned} f(q(t_k)) &= (f_+(q(t_k)) - f_-(q(t_k))) = \\ &= B_0 \tanh(C_0(q(t_k) - a_0)) - B_0 \tanh(C_0(q(t_k) + a_0)) + 2b_1. \end{aligned} \quad (27)$$

Rastavimo izraz (27) u dva slučaja:

Slučaj 1, kada je k parno tj. $k = 0, \pm \frac{2\pi}{\omega}, \pm \frac{4\pi}{\omega}, \dots$, $k = 2n, n \in \mathbb{Z}$. U ovim tačkama vrednost $\cos \omega t_{2n}$ je

jednaka jedinici, odnosno, $q(t_{2n}) = q_0 - \frac{I_m}{\omega}(1 - 1) = q_0$ sledi da je izraz (27)

$$\begin{aligned} f(q(t_{2n})) &= B_0 \tanh(C_0(q_0 - a_0)) - B_0 \tanh(C_0(q_0 + a_0)) + \\ &+ B_0 (\tanh(C_0(q_0 + a_0)) - \tanh(C_0(q_0 - a_0))) = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Slučaj 2, kada je k neparno tj. $k = \pm \frac{\pi}{\omega}, \pm \frac{3\pi}{\omega}, \dots$, $k = 2n + 1, n \in \mathbb{Z}$. U ovim tačkama vrednost $\cos \omega t_{2n+1}$ je

minus jedan, a naelektrisanje je $q(t_{2n+1}) = q_0 - 2 \frac{I_m}{\omega} = -q_0$.

Korišćenjem osobine neparnosti $\tanh(\cdot)$ funkcije, $\tanh(-x) = -\tanh(x)$, izraz (27) i u ovom slučaju biva jednak nuli,

$$\begin{aligned} f(q(t_{2n+1})) &= B_0 \tanh(C_0(-q_0 - a_0)) - \\ &B_0 \tanh(C_0(-q_0 + a_0)) + \\ &B_0 \tanh(C_0(q_0 + a_0)) - \\ &B_0 \tanh(C_0(q_0 - a_0)) = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

Sumirajući dva slučaja (28) i (29), izraz (27) postaje jednak nuli, a time i izraz (18) postaje takođe jednak nuli. Budući da je napon na memristoru jednak $u(t) = d\phi(t)/dt$, a struja $i(t) = dq(t)/dt$, izraz (17) se može napisati u obliku

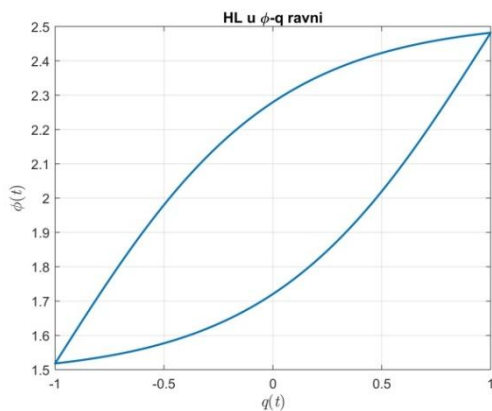
$$u(t) = \left(\frac{d f_+(q(t))}{dq} h(i(t)) + \frac{d f_-(q(t))}{dq} h(-i(t)) \right) i(t), \quad (30)$$

odnosno

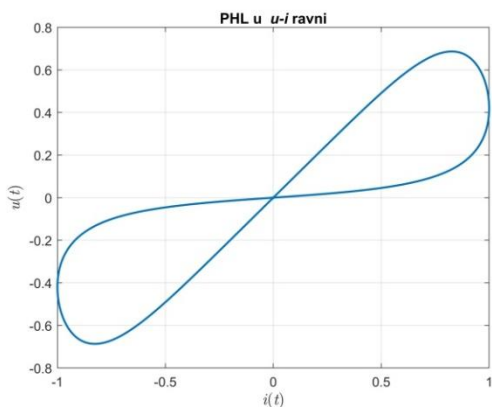
$$u(t) = M(q, i) \cdot i(t), \quad (31)$$

gde je memristansa $M(q, i)$ memristora koji ima HL u ϕ - q ravni jednaka prvom činiocu u zagradi izraza (30). Na osnovu izvršenih analiza možemo zaključiti da izvod po vremenu HL-a u ϕ - q ravni memristora, rezultuje pojavom PHL-a u u - i ravni memristora.

Radi ilustracije dobijenih rezultata, polazna parametarska jednačina (14) za HL u ϕ - q ravni je prikazana na Slici 5, a rezultujuća parametarska jednačina (30) za PHL u u - i ravni memristora je prikazana na Slici 6.



Slika 5. HL memristora u ϕ - q ravni. Vrednosti parametara $I_m=1$, $\omega=1$, $q_0=I_m/\omega$, $B_0=1$, $C_0=1$, $a_0=1$, $q(t)=q_0 - I_m/\omega(1-\cos\omega t)$.



Slika 6. PHL u u - i ravni memristora. Vrednosti parametara $I_m=1$, $\omega=1$, $q_0=I_m/\omega$, $B_0=1$, $C_0=1$, $a_0=1$, $q(t)=q_0 - I_m/\omega(1-\cos\omega t)$.

Kao prateći rezultat sprovedene analize, kao nov rezultat ovog rada, iz parametarske jednačine za HL

$$\begin{aligned} f_{HL}(x(t)) &= f_{HL+}(x(t)) \cdot h\left(\frac{d}{dt}x(t)\right) + \\ &f_{HL-}(x(t)) \cdot h\left(-\frac{d}{dt}x(t)\right) \end{aligned} \quad (32)$$

izvedena je parametarska jednačina za PHL

$$\begin{aligned} f_{PHL}(x(t)) &= \frac{d}{dt} f_{HL+}(x(t)) \cdot h\left(\frac{d}{dt}x(t)\right) + \\ &\frac{d}{dt} f_{HL-}(x(t)) \cdot h\left(-\frac{d}{dt}x(t)\right) \end{aligned} \quad (33)$$

kao glavni rezultat i doprinos ovog rada.

6. ZAKLJUČAK

U ovom radu je izvedena parametarska jednačina za uštinutu histeretsnu petlju, i uspostavljena njena veza sa klasičnom histeretsnom petljom modelovanom korišćenjem Takačevog modela. Rezultat je dobijen u kontekstu matematičkog modelovanja memristora koji ima složenu histeretsnu nelinearnost u fluks-naelektrisanje ravni.

7. LITERATURA

DOI: <https://doi.org/10.24867/30BE50Bratic>

- [2] S. P. Adhikari, M. P. Sah, H. Kim and L. O. Chua, "Three Fingerprints of Memristor," in IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, vol. 60, no. 11, pp. 3008-3021, Nov. 2013, doi: 10.1109/TCSI.2013.2256171.
- [3] L. Chua, "Memristor, Hodgkin-Huxley, and Edge of Chaos", Nanotechnology, Vol. 24, No 11, Sept. 2013, DOI 10.1088/0957-4484/24/38/383001
- [4] D. Lin, S. Y. R. Hui and L. O. Chua, "Gas Discharge Lamps Are Volatile Memristors," in IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, vol. 61, no. 7, pp. 2066-2073, July 2014, doi: 10.1109/TCSI.2014.2304659.

DOI: <https://doi.org/10.24867/30BE50Bratic>

- [6] Takacs, J. *Mathematics of Hysteretic Phenomena*. Weinheim (Germany): Wiley-VCH, 2006. ISBN: 9783527404018

Kratka biografija:



Stojanka Bratić rođena je u Trebinju 1998. god. Diplomski rad na Fakultetu tehničkih nauka iz oblasti elektrotehnike i računarstva - embeded sistemi i algoritmi odbranila je 2022. godine.

kontakt: braticstojanka@gmail.com