

MODELIRANJE I UPRAVLJANJE SISTEMOM SA INVERZNIM KLATNOM NA KOLICIMA

MODELING AND CONTROL OF A CART WITH INVERTED PENDULUM

Žofia Galac, *Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad*

Oblast – ELEKTROTEHNIKA I RAČUNARSTVO

Kratak sadržaj – U okviru ovog rada je obrađen sistem sa inverznim klatnom na kolicima. Izvršeno je modelovanje sistema i dobijeni su nelinearni i linearizovan model. Ispitivane su dve tehnike upravljanja: PID regulator i linearizacija u povratnoj sprezi (feedback linearizacija). Izvršena je simulacija rada ovakvih sistema i analizirane su prednosti i nedostaci predloženih tehnika.

Ključne reči: Inverzna klatna na kolicima, Linearni model, Nelinearni model, PID regulator, Feedback linearizacija

Abstract – As part of this work, a system with an inverted pendulum on a cart was studied. The system was modeled, resulting in both nonlinear and linearized models. Two control techniques were examined: PID control and feedback linearization. Simulations of such systems were carried out, and the advantages and disadvantages of the control techniques were analyzed.

Keywords: Inverted pendulum on a cart, Linear model, Nonlinear model, PID controller, Feedback linearization

1. UVOD

Modelovanje omogućava da složeni realni sistemi budu predstavljeni na pojednostavljen način i ima ključnu ulogu u pribavljanju informacija o ponašanju sistema bez stvarnog eksperimentisanja u realnom vremenu. Simulacijama nad modelom možemo optimizovati stvarni model, istražiti najbolje parametre, strategije, mogu da se posmatraju uticaji različitih regulatora i kontrolnih tehnika. Eksperimentisanje na modelu je znatno bezbednije, izvodljivije, brže i jeftinije u poređenju sa eksperimentisanjem na stvarnom sistemu [1].

Motivacija za ovaj rad bilo je ispitivanje razlika između linearizovanog i nelinearnog modela inverznog klatna na kolicima pri primeni upravljanja na nivou simulacija. U tu svrhu, u okviru rada biće analizirana efikasnost upravljanja pomoću PID regulatora linearnim i nelinearnim modelom sa ciljem da se klatno vrati u gornji vertikalni položaj. Takođe, biće ispitana mogućnost primene linearizacije u povratnoj sprezi (koju ćemo u nastavku zvat i prema engleskom nazivu, feedback linearizacija).

NAPOMENA:

Ovaj rad proistekao je iz master rada čiji mentor je bio dr Željko Kanović, red. prof.

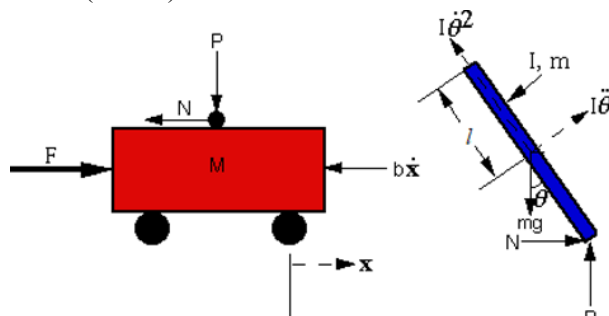
2. MATERIJAL I METOD RADA

2.1. Model sistema

Sistem inverznog klatna na kolicima se sastoji od kolica koje se mogu pomerati horizontalno i od klatna koje je pričvršćeno za kolica jednim svojim krajem. Kao rezultat, klatno se može kretati samo u ravni kretanja kolica [2].

Sistem inverznog klatna na kolicima je nelinearan sistem sa dve ravnotežne tačke: jedna stabilna ($\theta = 0$) i jedna nestabilna ($\theta = 180^\circ$). Zbog inherentne nestabilnosti potrebno je primeniti silu kako bi se održao uspravan položaj što je i cilj ovog rada [3].

Prilikom analize sistema, potrebno je izvršiti razlaganje sistema i posebno posmatrati sile koje deluju na kolica i na klatno (Slika 1). Parametri sistema su sledeći:



Slika 1. Prikaz sile koje deluju na kolica i klatno [4]

- M – Masa kolica [kg]
- m – Masa klatna [kg]
- b – Koeficijent trenja kolica [Ns/m]
- I – Maseni moment inercije klatna [$\text{kg} \cdot \text{m}^2$]
- g – Gravitaciona sila [m/s^2]
- l – Dužina od kraja klatna do centra mase klatna [m]
- F – Sila koja deluje na kolica [N]
- x – Položaj kolica [m]
- θ – Ugao klatna u odnosu na vertikalnu osu [$^\circ$]
- N – Horizontalna komponenta sile reakcije
- P – Vertikalna komponenta sile reakcije

Posmatrajući sile koje deluju u horizontalnom pravcu na kolica, dobija se jednačina

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + N = F. \quad (2.1)$$

Odatle sledi

$$\ddot{x} = \frac{(F - N - b\dot{x})}{M}. \quad (2.2)$$

Sumirajući sile koje deluju u vertikalnom pravcu na kolica ne dobiju se korisni podaci, samim tim nema potrebe da se posmatra ovaj slučaj [5].

Na klatno u horizontalnom pravcu deluje inerciona sila, tangencijalna sila i centripetalna sila i zapisuje se kao

$$N = m\ddot{x} - ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta) + ml\ddot{\theta} \cos(\theta). \quad (2.3)$$

Zamenom izraza (2.3) u (2.2) i sređivanjem dobije se

$$(M + m)\ddot{x} + b\dot{x} + ml\ddot{\theta} \cos(\theta) - ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta) = F, \quad (2.4)$$

i ona predstavlja prvu jednačinu modela sistema.

Prilikom analize uticaja sila u vertikalnom pravcu na klatno, dolazi se do jednačine

$$P \sin(\theta) + N \cos(\theta) - mg \sin(\theta) = ml\ddot{\theta} + m\ddot{x} \cos(\theta). \quad (2.5)$$

Sabiranjem momenata oko težine klatna dobije se

$$-Nl \cos(\theta) - Pl \sin(\theta) = \ddot{\theta} I, \quad (2.6)$$

iz čega može da se izrazi

$$P = \frac{\ddot{\theta} I + Nl \cos(\theta)}{-l \sin(\theta)}. \quad (2.7)$$

Nakon što se (2.7) uvrsti u (2.5) i sredi, dobije se

$$(I + ml^2)\ddot{\theta} + mgl \sin(\theta) = -ml \cos(\theta)\ddot{x} \quad (2.8)$$

i ona predstavlja drugu jednačinu modela [6].

2.1.1. Linearizacija oko pozicije $\theta = \pi$

Za dobijanje funkcije prenosa i za simuliranje modela u Simulinku neophodno je izvršiti linearizaciju. Pošto se klatno stabilizuje u nestabilnoj ravnotežnoj tački, jednačine treba linearizovati oko $\theta = \pi$ i pretpostavlja se

$$\theta = \pi + \phi, \quad (2.9)$$

gde ϕ predstavlja mali ugao odstupanja od gornjeg vertikalnog položaja π .

Pod pretpostavkom da se klatno pomera u malim uglovima, mogu se zapisati aproksimacije

$$\cos(\theta) = \cos(\pi + \phi) \approx -1, \quad (2.10)$$

$$\sin(\theta) = \sin(\pi + \phi) \approx -\phi, \quad (2.11)$$

$$\dot{\theta}^2 = \dot{\phi}^2 \approx 0. \quad (2.12)$$

Nakon zamene aproksimacija u nelinearne jednačine (2.8) i (2.4), dobiju se dve linearizovane jednačine

$$(I + ml^2)\ddot{\phi} - mgl\phi = ml\ddot{x}, \quad (2.13)$$

$$(M + m)\ddot{x} + b\dot{x} - ml\ddot{\phi} = u, \quad (2.14)$$

gde se umesto oznake F prelazi na oznaku u , jer sila F u kontekstu upravljanja predstavlja ulazni signal u [7].

2.2. PID

PID regulator se dobije objedinjavanjem proporcionalnog, integralnog i diferencijalnog dejstva. Zapisuje se u formi

$$\text{PID}(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{de(t)}{dt}, \quad (2.21)$$

gde K_p predstavlja pojačanje, K_i integracionu konstantu, K_d diferencijalnu konstantu i $e(t)$ označava grešku. U industriji parametri PID regulatora se vrlo često određuju na empirijski način. Proporcionalno dejstvo utiče na vreme uspona i nikada ne eliminiše grešku u ustaljenom stanju. Integralno dejstvo smanjuje grešku u ustaljenom stanju ali može loše uticati na odziv sistema u prelaznom režimu. Diferencijalno dejstvo poboljšava odziv sistema u prelaznom režimu, smanjuje preskok i pozitivno utiče na stabilnost sistema [8].

2.3. Feedback linearizacija

Cilj feedback linearizacije je da se nelinearni sistem primenom upravljanja u povratnoj sprezi transformiše u linearan. Nelinearni sistemi u sebi sadrže nelinearnosti, a upravljanje treba da se bira tako da poništi te nelinearnosti. Nakon poništavanja nelinearnosti, sistem postaje linearan [9]

Sistem jednačina inverznog klatna na kolicima može da se izrazi u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} M + m & ml \cos(\theta) \\ ml \cos(\theta) & I + ml^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u - b\dot{x} + ml \sin(\theta) \dot{\theta}^2 \\ -mgl \sin(\theta) \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

odakle može da se izrazi

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(I + ml^2)(u - b\dot{x} + ml \sin(\theta) \dot{\theta}^2) + (ml)^2 \sin(\theta) \cos(\theta) g}{r} \\ \frac{-ml \cos(\theta) (u - b\dot{x} + ml \sin(\theta) \dot{\theta}^2 - (M + m)mgl \sin(\theta))}{r} \end{bmatrix}, \quad (2.23)$$

gde je

$$r = Mml^2 + (M + m)I + (ml)^2 (\sin(\theta))^2. \quad (2.24)$$

Korišćenjem $X_1 = x, X_2 = \dot{x}, X_3 = \theta, X_4 = \dot{\theta}$ kao promenljivih stanja može da se koristi zapis

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \\ \dot{X}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{X}) + \mathbf{g}(\mathbf{X})u =$$

$$= \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \frac{(I + ml^2)(-b\dot{x} + ml \sin(\theta) \dot{\theta}^2) + (ml)^2 \sin(\theta) \cos(\theta) g}{r} \\ \dot{\theta} \\ \frac{-ml \cos(\theta) (-b\dot{x} + ml \sin(\theta) \dot{\theta}^2 - (M + m)mgl \sin(\theta))}{r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{I + ml^2}{r} \\ 0 \\ \frac{-ml \cos(\theta)}{r} \end{bmatrix} u, \quad (2.25)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{X}) = [0 \ 0 \ 1 \ 0] \mathbf{X}. \quad (2.26)$$

Da bi se uspešno odabrao upravljački signal, potrebno je da se izrazi i analizira $\ddot{\theta}$ iz (2.25):

$$\ddot{\theta} = \frac{-ml \cos(\theta) (-b\dot{x} + ml \sin(\theta) \dot{\theta}^2 - (M + m)mgl \sin(\theta))}{Mml^2 + (M + m)I + (ml)^2 (\sin(\theta))^2} - \frac{ml \cos(\theta)}{Mml^2 + (M + m)I + (ml)^2 (\sin(\theta))^2} \cdot u. \quad (2.27)$$

Potrebno je odabrati upravljački signal u tako da eliminiše sve nelinearnosti u izrazu (2.27):

$$u = - \frac{Mml^2 + (M + m)I + (ml)^2 (\sin(\theta))^2}{ml \cos(\theta)} \cdot \left(- \frac{-ml \cos(\theta) (-b\dot{x} + ml \sin(\theta) \dot{\theta}^2 - (M + m)mgl \sin(\theta))}{Mml^2 + (M + m)I + (ml)^2 (\sin(\theta))^2} + K_1 e_\theta + K_2 \dot{e}_\theta + \ddot{\theta}_d \right), \quad (2.28)$$

gde je greška jednaka razlici željenog ugla θ_d i izmerenog ugla θ , tj. $e_\theta = \theta_d - \theta$.

Nakon što se dobijeno upravljanje uvrsti u jednačinu (2.27), dobije se

$$\ddot{\theta} = K_1 e_\theta + K_2 \dot{e}_\theta + \ddot{\theta}_d, \quad (2.29)$$

i ona više ne sadrži nelinearnosti. Nakon toga prelazi se na izbor adekvatne upravljačke kontrole. U ovom slučaju primenjuje se metoda podešavanja polova i dobije se $K_1 = \omega^2$ i $K_2 = 2\omega$. K_1 i K_2 predstavljaju svojstvene vrednosti sistema, odnosno polove karakteristične jednačine, a ω predstavlja realnu vrednost dvostrukog pola tj. mesto pola

na realnoj osi kompleksne ravni. Kada se svojstvene vrednosti sistema nalaze u levoj polovini kompleksne ravni tj. ako je $\omega < 0$, sistem će konvergirati ka željenoj vrednosti tj. greška će konvergirati ka nuli $e_\theta(t) \rightarrow 0$ [10]:

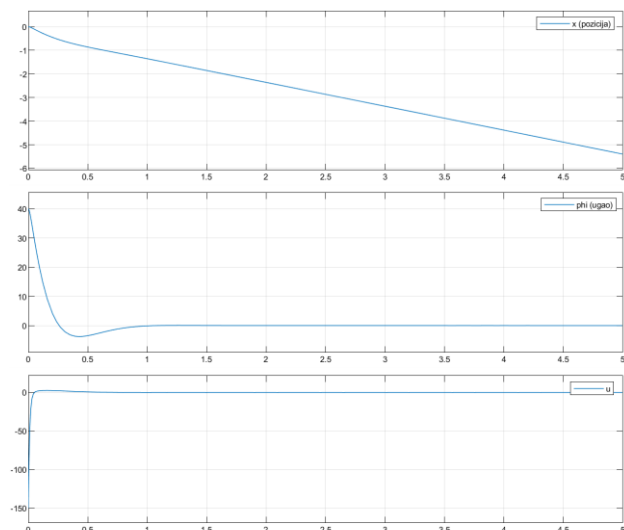
3. REZULTATI I DISKUSIJA

3.1. Linearizovan sistem sa PID regulacijom

Parametri PID regulatora su određeni na empirijski način i one iznose: $K_p = 15$, $K_i = 2$, $K_d = 2$.

Analiziranjem dobijenih rezultata može da se zaključi da u slučaju kada je $-38^\circ < \phi < 38^\circ$ linearizacija je u potpunosti upotrebljiva i PID regulacija može da vrati klatno u uspravan položaj koji odstupa od 180° za malu vrednost reda veličine 10^{-3} .

Za uglove $\phi > 38^\circ$ i $\phi < -38^\circ$ kombinacija linearizacije i PID regulacije je i dalje efikasna, klatno vraća u uspravan položaj. Ipak, u poređenju sa prethodnim slučajem, odstupanje od željene pozicije je većeg reda veličine, iako je približno jednaka 0° . Važno je naglasiti, ako je sistem daleko od radne tačke u kojoj je model linearizovan, onda to više nije realan prikaz rada sistema, jer linearizacija unosi značajnu grešku. Na Slici 2 su prikazani rezultati simulacije za $\phi = 40^\circ$.



Slika 2. Rezultati simulacije (pozicija kolica, ugao klatna i upravljanje) za $\phi = 40^\circ$.

Brzi skok upravljačkog signala ukazuje da je sistem imao inicijalno odstupanje koje je zahtevalo snažnu korekciju. Na osnovu smirenja upravljačkog signala zaključujemo da je sistem doveden u stabilno stanje i nije više potrebna aktivna regulacija.

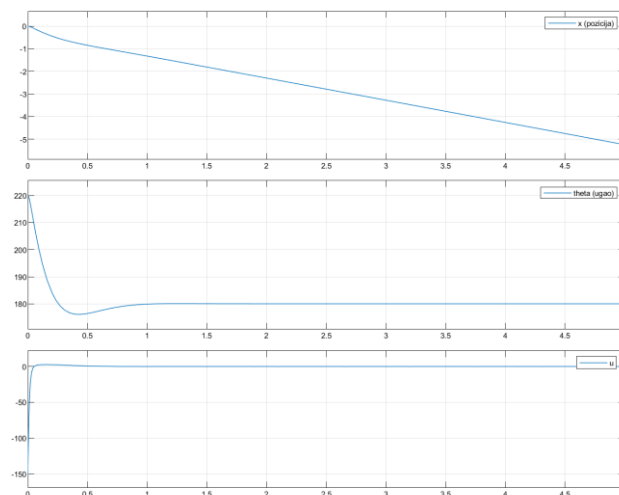
U svim simulacijama kolica se pomeraju radi korekcije nagiba klatna i nemaju mehanizam za vraćanje u početnu poziciju. Upravljanje utiče na poziciju kolica, ali u okviru ovog rada nije razmatrano. Ukoliko je klatno izmešteno iz ravnotežnog položaja ulevo, kolica se kreću u levom smeru, analogno, izmeštanjem klatna udesno, kolica se pomeraju u desnom smeru da bi vratili klatno u gornje ravnotežno stanje. Ponašanje kolica je identično i u slučaju nelinearnog sistema sa PID regulacijom (poglavlje 3.2) i u slučaju feedback linearizacije (poglavlje 3.3).

3.2. Nelinearan sistem sa PID regulacijom

Parametri PID regulatora su određeni na empirijski način i one iznose: $K_p = 15$, $K_i = 2$, $K_d = 2$.

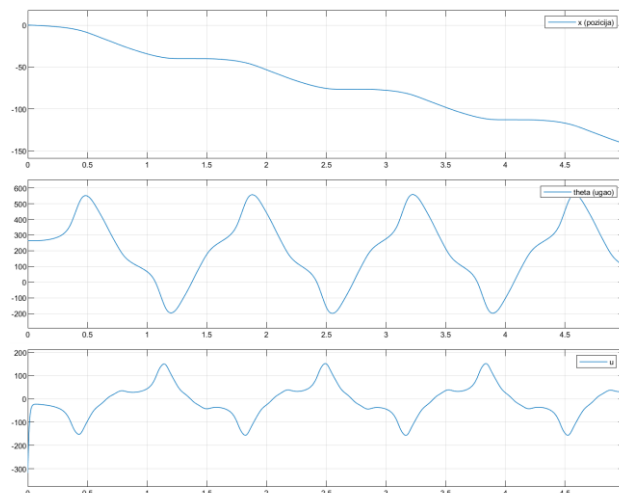
Prilikom simulacija gde je $-39^\circ < \phi < 39^\circ$ PID regulacija uspešno vraća klatno u uspravan položaj, klatno odstupa od 180° za malu vrednost reda veličine 10^{-3} .

Ukoliko je $-80^\circ < \phi < -40^\circ$ ili $80^\circ < \phi < 40^\circ$ nakon PID regulacije odstupanja klatna od 180° su većege reda od prethodnog slučaja, ali rezultati su i dalje približno jednaki nuli. Na Slici 3 su prikazani rezultati simulacije za $\phi = 40^\circ$.



Slika 3. Rezultati simulacije (pozicija kolica, ugao klatna i upravljanje) za $\phi = 40^\circ$.

U slučaju kada je $\phi > 80^\circ$, PID regulacija ne može da vrati klatno u uspravan ili približno uspravan položaj. Postoje značajne oscilacije i kod pozicije kolica, ugla klatna i upravljanja, što se i vidi na Slici 4 za $\phi = 85^\circ$.



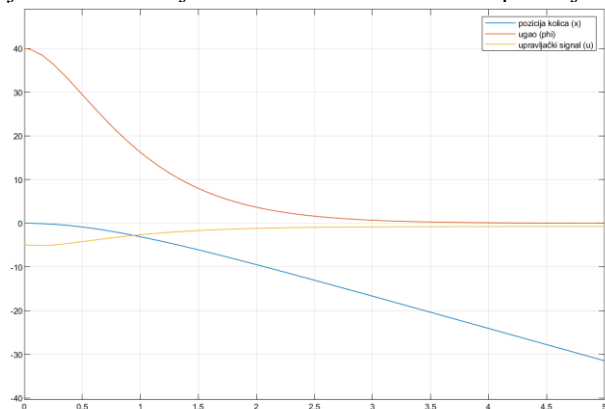
Slika 4. Rezultati simulacije (pozicija kolica, ugao klatna i upravljanje) za $\phi = 85^\circ$.

3.3. Feedback linearizacija

Na osnovu rezultata može da se zaključi da je metod feedback linearizacije efikasan, ali mu je potrebno određeno vreme da klatno dovede u referentni položaj. Za početna izmeštanja uglova veća od $\phi = 15^\circ$, vreme od $t = 2.5$ s nije dovoljno da se klatno vrati u referentni položaj. Ipak, u trenutku $t = 7.5$ s, vrednosti uglova su veoma

male, što ukazuje na to da se klatno nakon svakog početnog pomeraja uspešno vraća na 180° .

Na Slici 5 je prikazan rezultat simulacije za $\phi = 40^\circ$ i jasno se vidi da je klatno vraćeno u referentni položaj.



Slika 5. Rezultati feedback linearizacije (pozicija kolica, ugao klatna i upravljanje) za $\phi = 40^\circ$.

U slučaju velikih početnih pomeraja kao što je $\phi = 160^\circ$, upravljanje uzima jako velike vrednosti i ne može se fizički implementirati. Zbog toga se dodaje saturacija (sa granicama 100 i -100) na upravljanje. Nakon primene saturacije klatno se i dalje vraća na 180° .

Može se desiti da do $t = 10$ s kolica dostignu veliku udaljenost kao što je -235 m za $\phi = 80^\circ$, a to nije fizički izvodljivo i potrebno je i ograničenje pozicije uzeti u obzir.

Smetnje mogu da se jave i tokom simulacija. Za primer uzimamo slučaj kada je klatno na početku simulacije izmešteno za $\phi = 30^\circ$ i na njega deluje impuls u trenutku $t = 5$ s. U Tabeli 1 su analizirani dobijeni rezultati položaja klatna za različite vrednosti amplitude i širine impulsa. Jasno se vidi da su rezultati zadovoljavajući i da feedback linearizacija uspešno vraća klatno na 180° .

Tabela 1. Pomeraj klatna [$^\circ$] u odnosu na 180° u trenutku $t = 15$ s, kada je početno pomeranje $\phi = 30$ i na njega deluje impuls u trenutku $t = 5$ s.

		Amplituda impulsa			
		1	5	20	100
Širina	1	-0.0000005	-0.0000029	-0.0000137	-0.0000414
imp.	10	-0.0000138	-0.0000645	-0.0000855	-0.0003933
[%]	30	-0.0005710	-0.0026827	-0.0051160	-0.0035069

Za veće vrednosti amplitude i širine impulsa nastaje upravljanje koje nije moguće realizovati u svakom realnom sistemu. Samim tim ove slučajeve bi trebalo analizirati primenom saturacije na upravljanje, ali to prevazilazi okvire ovog rada

4. ZAKLJUČAK

U slučaju linearizovanog modela sa PID regulacijom klatno se uspešno vraća u gornji ravnotežni položaj za sva početna izmeštanja. Važno je naglasiti da sami rezultati jesu zadovoljavajući, ali da linearizovani model nije adekvatan ako se posmatra daleko od radne tačke, jer time ne odslikava realno ponašanje sistema.

Prilikom nelinearnog modela sa PID regulacijom za $-80^\circ < \phi < 80^\circ$ klatno se vraća na 180° . Ukoliko je $\phi >$

80° ili $\phi < -80^\circ$, klatno ne može da se vrati u referentni položaj (180°) i osciluje. Dakle, možemo zaključiti da primena PID regulatora na nelinearizovani model (realan sistem) ima izvesna ograničenja po pitanju opsega radnih parametara, odnosno početnog položaja klatna.

Feedback linearizacija se efikasno može primeniti nezavisno od veličine početnog pomeranja ϕ i nezavisno od smetnje tokom simulacije. Feedback linearizacija uspešno poništava nelinearnosti sistema i klatno se u svakom slučaju vrati u referentni položaj, ali potrebno je obratiti pažnju na mogućnost fizičke realizacije, jer u pojedinim slučajevima upravljanje ima jako velike vrednosti koje nisu izvodljive u realnom okruženju. Sveukupno govoreći, ova tehnika upravljanja je sa teorijskog aspekta najuspešnija, jer ne zavisi od početnog položaja klatna. Sa druge strane, po pitanju praktične implementacije ove tehnike, može se reći da je ona nešto komplikovanija u odnosu na linearni (PID) regulator.

5. LITERATURA

- [1] A. Erdeljan, D. Čapko, "Modelovanje i simulacija sistema: sa primerima - II izdanje", Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu. ISBN: 978-86-6022-101-0 (broš.), 2018.
- [2] Md. Monir, "Analyzing and Designing Control System for an Inverted Pendulum on a Cart", European Scientific Journal, Vol. 14, No. 6, pp. 387-398, 2018.
- [3] D. Firmansyah, "Simulation of an inverted pendulum", Hayfa Press, Padang. ISBN: 978-979-1134-121-0, 2020.
- [4] <https://img.goglas.com/img/138971214>, pristupljeno 15.03.2025
- [5] K. Sultan, "Inverted Pendulum, Analysis, Design and Implementation", Institute of Industrial Electronics Engineering, Karachi, Pakistan. Document Version 1.0, 2003.
- [6] I. S. Channabasayya, U. B. Mathpati, "Stability Analysis of Inverted Cart Pendulum Using PID and H_∞ Controller", International Journal of Advance Electrical and Electronics Engineering, ISSN: 2278-8948, Vol. 4, No. 1, pp: 21-27, 2015.
- [7] U. H. P. Kumarihami, I. S. I. Jayathunga, B. I. Annasiwaththa, "Development of a Virtual Inverted Pendulum Controlling System for Online Teaching", GARI International Journal of Multidisciplinary Research, ISSN: 2659-2193, Vol. 07, No. 01, 2021.
- [8] L. Netranjeeb, "Modeling and Controller Design of an Inverted Pendulum System", Department of Electrical Engineering, National Institute of Technology, Rourkela. Bachelor's thesis, 2011.
- [9] H. K. Khalil, "Nonlinear Systems. Third Edition", Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey. ISBN: 0-13-067389-7, 2002.
- [10] https://youtu.be/YYLFGf_IjMI?si=-I2iWWyFgKs1--q, pristupljeno 10.02.2025.

Kratka biografija:



Žofia Galac rođena je u Subotici 2000. god. Diplomski rad na Fakultetu tehničkih nauka iz oblasti Elektrotehnike i računarstva – Računarstvo i automatika odbranila je 2023.god.
kontakt: galaczsofia@gmail.com