

PRIMENA LINEARNOG PROGRAMIRANJA U OPTIMIZACIJI PLANIRANJA I UPRAVLJANJA PROJEKTIMA**THE APPLICATION OF LINEAR PROGRAMMING IN THE OPTIMIZATION OF PROJECT PLANNING AND MANAGEMENT***Jelena Ubiparip, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad***Oblast – ELEKTROTEHNIKA I RAČUNARSTVO**

Kratak sadržaj – Ovaj rad je u potpunosti posvećen optimalnom upravljanju projektima posebno iz oblasti upravljanja IT projektima uz oslonac na metodologiju i tehnike linearnog programiranja. Da bismo upotpunili rad i upotrebu projekta optimizacionog softvera učinili dostupnom, razvili smo jedno veb-bazirano rešenje koje omogućuje optimalno planiranje svih procesa u projektu.

Ključne reči: *Linearno programiranje, Veb aplikacija, Naučni menadžment, Projektni menadžment*

Abstract – This paper is fully dedicated to optimal project management, especially in the field of IT project management, based on the methodology and techniques of linear programming. In order to make the use of the optimization software project available, we have developed a web-based solution that enables optimal planning of all processes in the project.

Keywords: *Linear programming, Web application, Scientific management, Project management*

1. UVOD

Uspeh i opstanak svake organizacije zavisi od kvaliteta odluka koje donose njeni menadžeri. Osnovno pitanje u mnogim problemima koji se javljaju u poslovanju i industriji je kako raspodeliti ograničene resurse na različite aktivnosti. Odgovornost menadžera (donosioca odluke) je da rasporedi resurse na određene aktivnosti kako bi se postigli najbolji rezultati za organizaciju. Iz tog razloga, razvijeni su alati i tehnike koje mogu pomoći u potrazi za optimalnim raspodelom resursa.

Upravo iz tog razloga je razvijena aplikacija „Upravljanje projekta“. Pre svega, korisniku je omogućeno da unosi podatke o zadacima koje je potrebno izvršiti tokom trajanja projekta na lak način i nakon toga sledi računanje najbolje putanje toka projekta. Odnosno, koliko bi se cena projekta mogla uvećati ukoliko se redukuje vreme trajanja projekta. Osim toga, određuje se i u kom trenutku je najbolje započeti određeni zadatak.

Bilo bi pogrešno smatrati da ova aplikacija oslobađa korisnika od donošenja odluka. Ona mu samo pomaže u procesu odlučivanja, dajući perspektivu odluke koju treba da donese.

NAPOMENA:

Ovaj rad proistekao je iz master rada čiji mentor je bio dr Željko Kanović, red. prof.

Kada se ova komponenta (rezultati) doda kvalitativnoj, iskustvenoj i intuitivnoj – odluka korisnika nesumnjivo postaje bolja.

2. OPERACIONA ISTRAŽIVANJA I PRIMENA LINEARNOG PROGRAMIRANJA U OPTIMIZACIJI

Osnovna karakteristika savremenog društva je postojanje velikog broja složenih sistema, kao što su tehnološko-proizvodni sistemi, energetske sistemi, komunikacioni sistemi, transportni sistemi, razni sistemi u poljoprivredi, industriji, i dr.

U ovakvim uslovima, upravljanje se mora vršiti metodično, sa programom koji podrazumeva planiranje odluka, odnosno izrada plana i upravljanje realizacijom plana.

Operaciona istraživanja su nastala upravo na tim temeljima i zahtevima sa ciljem da primenom postojećih i razvojem novih naučnih metoda na kvantitativnim osnovama daju odgovore po pitanju najboljeg funkcionisanja složenih sistema u postojećim uslovima. Danas postoji čitav niz raznih naučnih metoda i tehnika koje su razvijene i koje imaju primenu rešavanja raznih problema upravljanja sistemima.

Metode i tehnike operacionih istraživanja su prvenstveno namenjene donosiocima odluka (menadžeri), ali i ekspertima i specijalistima koji dobro poznaju prirodu problema koji se rešava i koji, zajedno sa menadžerima, trebaju biti uključeni u ceo proces donošenja optimalnih odluka.

2.1. Funkcija cilja ili kriterijum upravljanja

U procesima upravljanja postoje tri jedinstvena pojma sa kojima se često operiše. Ti pojmovi naročito dolaze do izražaja kod primene matematičkih metoda u izučavanju procesa upravljanja, a to su funkcija cilja (kriterijum upravljanja), skup ograničenja i matematički model.

Nijedan upravljački zadatak ne može da postoji bez definisanog cilja. Drugim rečima, bez definisane funkcije cilja nemoguće je ostvariti konkretno upravljanje.

Po svom karakteru i sadržaju ciljevi mogu biti veoma različiti. U odnosu na definisani cilj meri se kvalitet upravljanja i vrši komparacija u procesu odabiranja najbolje ili zadovoljavajuće upravljačke akcije.

U matematičkom smislu funkcija cilja izražava se nekom funkcijom $F(X)$ gde je $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n -dimenzioni vektor, pri čemu treba odrediti njen minimum ili maksimum. Drugim rečima, funkcija cilja predstavlja funkciju više

promenljivih za koju je potrebno odrediti ekstremnu vrednost.

Funkcija cilja se minimizira ukoliko su njome izraženi troškovi, vreme realizacije zadatka, utrošak materijala, gubitak, škart u proizvodnji, vreme transporta, itd.

Funkcija cilja se maksimizira ako odražava dobit, prinos po jedinici površine, dohodak po glavi stanovnika, učinak, itd. Svaki konkretni zadatak zahteva poseban pristup u realizaciji funkcije cilja, čiji oblik zavisi od specifičnih uslova zadatka.

Optimalno ostvarivanje cilja, posredstvom traženja ekstremne vrednosti funkcije $F(X)$, u realnim uslovima ne može se ni zamisliti bez skupa ograničenja, koja karakterišu granice potencijalnih mogućnosti određenog sistema. Svaki organizacioni sistem karakterisan je brojnim ograničenjima, čija se priroda najčešće vezuje za različite kategorije ograničenih resursa (radna snaga, mašine, materijal, novčana sredstva, prostor, itd.). Pored navedenog skupa ograničenja postoji još i prirodni skup ograničenja koji se sastoji u tome da komponente vektora X moraju biti nenegativne veličine $x_i \geq 0$, ($i=1,2,\dots,n$).

Metode odabiranja upravljačkih odluka koje se zasnivaju na angažovanju matematičkih modela pružaju mogućnost sveobuhvatnijeg sagledavanja problema, boljeg iskorišćenja resursa, bržeg obavljanja procesa, smanjenje troškova i povećanje efikasnosti. Vrednost upravljačke odluke, dobijene pomoću matematičkog modela zavisi od adekvatnosti modela sa procesom koji se izučava.

Matematički model koji realno odražava sistem koji se istražuje omogućava da se pronađu uticaji upravljačkih parametara na izmenu karakteristika sistema u cilju postizanja uslova njegovog optimalnog funkcionisanja.

2.2. Linearno programiranje

Zadaci koji se sa aspekta odgovarajućeg matematičkog modela M svode na linearno programiranje, karakterišu se funkcijom cilja $F(X)$ koja predstavlja linearnu kombinaciju nepoznatih, kao i skupom ograničenja koji se zadaje sistemom linearnih jednačina ili nejednačina.

Ako se sa stanovišta matematičkog modela osvrnemo na linearno programiranje, problem se sastoji u tome kako naći minimum ili maksimum jedne linearne funkcije $F(X)$, pri određenom skupu ograničenja L zadanih linearnim vezama. Broj nepoznatih i ograničenja može da bude veoma različit.

Linearno programiranje predstavlja metodu određivanja takve kombinacije uzajamno povezanih faktora, koja od niza mogućih kombinacija predstavlja najpovoljniju. Drugim rečima, traži se takva kombinacija koja će, pored toga što će zadovoljiti data ograničenja, dati kriterijumu optimalnosti najbolju moguću (optimalnu) vrednost.

Opšta matematička formulacija zadatka linearnog programiranja sastoji se u sledećem:

Treba odrediti takav skup vrednosti $x_1, x_2, \dots, x_n$, tj. komponentata n -dimenzinog vektora $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ iz oblasti koja je zadata sistemom linearnih jednačina

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}x_k + b_i \geq 0, \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (1)$$

$$x_k \geq 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

za koje funkcija cilja

$$F(x) = F(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n \quad (3)$$

koja predstavlja linearnu kombinaciju nepoznatih x_k dostiže maksimalnu (minimalnu) vrednost.

Različite metode rešavanja zadataka linearnog programiranja imaju niz specifičnosti u pretraživanju mogućih varijanti plana u cilju izbora optimalnog plana. Pored toga, postoje opšte metode koje omogućavaju da se nađe rešenje bilo kog zadatka linearnog programiranja. U takve metode spada Dantzig-ova metoda koja je više poznata kao simpleks metoda kao i njene modifikacije razvijene vremenom.

2.3. Simpleks metoda

Idea simpleks metode sadrži tri bitna elementa:

1. mogućnost određivanja bar jednog dopustivog plana X
2. mogućnost provere da li je određeni dopustivi plan X optimalan ili ne
3. mogućnost da se u slučaju izbora dopustivog plana X koji nije optimalan odredi novi plan koji je bliži optimalnom

U slučaju da postoje sve tri ove mogućnosti, može se u okviru konačnog broja koraka (računski korak u iteracionom procesu traženja rešenja) dobiti optimalni plan koji predstavlja rešenje formulisanog zadatka. Prema tome, simpleks metoda zasniva se na sukcesivnom poboljšanju dopustivog plana, sve dok se ne dobije optimalan plan. Ovakav prilaz u formiranju algoritma simpleks metode, takođe omogućava da se u procesu rešavanja bilo kog zadatka ustanovi da li je on rešiv ili ne, što znači da postoji mogućnost ispitivanja postojanja protivrečnosti u ograničenjima i ispitivanje da li je funkcija cilja $F(X)$ neograničena u oblasti.

2.4. Optimizacioni proces u Python-u

Korišćenje Python-a za linearno programiranje obuhvata nekoliko ključnih koraka:

1. Definisanje problema
2. Definisanje promenljivih
3. Definisanje funkcije cilja
4. Definisanje ograničenja
5. Rešavanje problema
6. Prikaz rezultata

Cilj definisanja problema je da se dođe do formalnog opisa modela. Uzimajući u obzir dostupne podatke, često problem može da bude mnogo zahtevniji nego što je potrebno. Iz tog razloga je potrebno dobro proučiti koji su podaci zaista potrebni jer ograničenja dostupnih podataka mogu značajno promeniti opis modela i kasniju formulaciju.

Za rešavanje problema u Python-u najčešće se koriste biblioteke „Scipy“ i „PuLP“. Prednost biblioteke „PuLP“ nad „Scipy“ je u tome što omogućava lakše definisanje i rešavanje problema linearnog programiranja.

„PuLP“ je, kao što je navedeno, biblioteka koja se koristi za rešavanje problema optimizacije, posebno u kontekstu linearnog programiranja i celobrojnog programiranja. Ova biblioteka je vrlo korisna iz nekoliko razloga:

- Podrška za različite vrste optimizacije - linearno programiranje, celobrojno programiranje, mešovito celobrojno programiranje
- Kompatibilnost sa različitim solverima – podržava širok spektar solvera za rešavanje optimizacionih problema kao što su COIN-OR CBC, GLPK, CPLEX i Gurobi
- Prilagodljivost – omogućava korisnicima da kreiraju različite vrste problema, bilo da se radi o logistici, proizvodnji, finansijama, planiranju...
- Integracija sa drugim Python alatima – lako se integriše sa drugim alatima i bibliotekama kao što su Pandas (za rad sa podacima), NumPy (za numeričke operacije), i mnoge druge.

3. APLIKACIJA „UPRAVLJANJE PROJEKTOM“

Aplikacija „Upravljanje Projektom“ je osmišljena tako da unos projektnih zadataka kao i podataka o samom zadatku budu jednostavni za korišćenje. Cilj aplikacije je da upotrebu projekta optimizacionog softvera učini dostupnom.

Zamisao je da aplikacija bude veb-bazirana, što omogućava lakši pristup i upotrebu sa različitih uređaja. Aplikacija nije namenjena svim zaposlenima, već isključivo menadžerima, kako bi imali uvid u ključne zahteve za izvršavanje projekta. Pored toga, aplikacija, koristeći prethodno objašnjeno linearno programiranje, izračunava najbolju putanju toka projekta, odnosno određuje optimalne trenutke za započinjanje svakog zadatka.

1. Ova aplikacija je veb aplikacija a za njeno razvijanje je korišćeno:
2. SQLite – ugradna baza podataka koji koristi standardni SQL jezik za upravljanje podacima.
3. Angular - open-source framework za izgradnju veb aplikacije.
4. Python – korišćen je za proces optimizacije.
5. Django veb okvir – koristi Python za razvoj veb aplikacija.

Na Slici 1. je prikazan primer projekta sa manjim brojem zadataka, u cilju lakšeg objašnjenja i razumevanja.

Upravljanje Projektom
Unesite podatke o projektu

Projekt 1

Prikaži rezultate

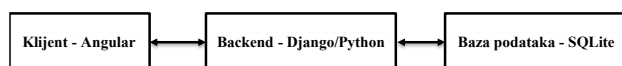
ID Zadatak	Ime zadatka	Opis	Zavisni od zadatka	Trajanje	Cena	Ubrzano trajanje	Cena ubrzanog trajanja	Opcije
1	Zadatak 1	Opis zadatka 1	0	10	100	8	150	Izmeni Obris
2	Zadatak 2	Opis zadatka 2	1	15	500	10	1000	Izmeni Obris
3	Zadatak 3	Opis zadatka 3	2	7	300	5	420	Izmeni Obris

Dodaj novi zadatak

Slika 1. Aplikacija „Upravljanje Projektom“

Aplikacija „Upravljanje Projektom“ razvijena je kao veb-bazirana aplikacija koja koristi modernu arhitekturu klijent-server modela. Ova arhitektura omogućava efikasnu obradu podataka, brzu interakciju sa korisnicima i skalabilnost sistema.

Dijagram arhitekture aplikacije dat je na Slici 2.



Slika 2. Arhitektura aplikacije

4. PRIMENA – PLANIRANJE I UPRAVLJANJE PROJEKTIMA

U radu je iskorišćeno prethodno opisano softversko rešenje, koje je primenjeno na konkretne podatke iz kompanije „Yris Solutions“ sa ciljem analize mogućnosti optimizacije vremenskih i resursnih parametara. Projekat čiji se podaci koriste u radu predstavlja skup zadataka koje je neophodno rešiti da bi se projektovala a posle i proizvela štampana ploča (engl. *Printed Circuit Board - PCB*).

U podacima koji su dostavljeni od strane kompanije svaki zadatak ima 8 obeležja:

1. ID (jedinstveni broj)
2. Ime (skraćeni opis zadatka)
3. Opis (detaljan opis zadatka)
4. Od kog prethodnog zadatka zavisi (ne može početi izvršavanje zadatka dok se navedeni zadatak ne izvrši)
5. Trajanje izvršavanja zadatka
6. Cena
7. Ubrzano izvršavanje zadatka
8. Cena ubrzanog izvršavanja zadatka

Cilj je odrediti koje zadatke treba vremenski skratiti, uzimajući u obzir da je cena ukoliko se zadatak skрати veća. „Ubrzano izvršavanje zadatka“ određuje zaposleni koji izvršava zadatak i predstavlja najkraće vreme u kojem zadatak može biti uspešno završen ako se poveća broj resursa, odnosno ako zaposleni bude u potpunosti posvećen samo tom zadatku.

Cena se povećava ukoliko se vreme izvršavanja zadatka skрати, jer ubrzavanje procesa obično zahteva dodatne resurse, kao što su dodatni radnici, rad u vanrednim uslovima ili korišćenje specijalizovane opreme. Ove dodatne potrebe povećavaju ukupne troškove projekta, što dovodi do viših cena u slučaju skraćivanja vremena izvršenja zadatka.

4.1. Određivanje kriterijuma optimalnosti na osnovu podataka

Da bi formulisanje funkcije bilo jednostavnije objašnjeno, upotrebićemo uopštenu formulaciju problema koja je prikazana u Tabeli 1.

ID Zadatak	Zavisni od zadatka	Trajanje [T]	Cena [C]	Ubrzano trajanje [TU]	Cena ubrzanog trajanja [CU]
A		TA	CA	TUA	CUA
B	A	TB	CB	TUB	CUB
C	B	TC	CC	TUC	CUC
n	n-1	Tn	Cn	TUn	CUn

Stvarno trajanje zadatka definiše se kao standardno trajanje umanjeno za vremenski period za koji je moguće njegovo skraćenje:

$$D_j = T_j - x_j \quad (4)$$

T_j predstavlja standardno vreme trajanja zadatka, odnosno vreme koje je potrebno da se zadatak završi bez ikakvog ubrzanja; x_j predstavlja broj nedelja (ili bilo koja druga jedinica vremena) koliko se trajanje zadatka može skratiti ako se ulože dodatni resursi; j je ID zadatka.

Dakle, formula (4) predstavlja novo trajanje zadatka nakon što je njegovo standardno vremensko razdoblje T_j skraćeno

za x_j . Ako uzmemo uopštene vrednosti iz tabele gore, trajanje zadatka je:

$$B = TB - xB \quad (5)$$

TB predstavlja standardno vreme trajanja zadatka B , odnosno vreme koje je potrebno za izvršavanje zadatka B bez bilo kakvog ubrzanja; xB predstavlja vreme skraćivanja za zadatak B , tj. vreme koje se oduzima od standardnog vremena TB kako bi se skratilo trajanje zadatka B kroz dodatne resurse ili ubrzanje bilo koje vrste; B je novo vreme trajanja zadatka B nakon što se primeni skraćivanje xB .

Veza između zadatka C i zadatka B od kojeg zadatak C zavisi je takva da početak zadatka C (yC) ne može nikako biti pre nego što zadatak B završi, tj:

$$yC = yB + TB - xB \quad (6)$$

yC predstavlja novo vreme ili trenutak kada će zadatak C biti završen; yB predstavlja vreme ili trenutak kada je zadatak B završen; TB i xB su prethodno objašnjeni.

Na osnovu prethodno definisanih veličina, funkcija kriterijuma optimalnosti, čija se minimalna vrednost traži, formuliše se na sledeći način:

$$\min Z = \sum (C_{Ui} - C_i) \cdot (T_j - D_j) \quad (7)$$

za $i = 1, \dots, n$. U ovom izrazu, Z označava ukupni trošak koji treba minimizirati. Parametar C_{Ui} predstavlja cenu ubrzanog izvršenja zadatka, odnosno dodatni trošak koji nastaje kada se vreme trajanja zadatka smanji, dok je C_i standardna cena izvršenja zadatka. Veličine T_j i D_j označavaju redom standardno i stvarno (ubrzano) trajanje zadatka.

Konkretizacijom opšte funkcije kriterijuma optimalnosti date u formuli (7), dobija se sledeća funkcija za slučaj razmatranog projekta:

$$\begin{aligned} Z = & 1000x_1 + 600x_2 + 800x_5 + 1200x_7 \\ & + 106,67x_6 + 106,67x_8 + 160x_9 + 160x_{10} \\ & + 160x_{11} + 177,77x_{12} + 145,45x_{13} \\ & + 160x_{14} + 160x_{15} + 200x_{16} + 400x_{17} \\ & + 400x_{18} + 177,78x_{19} + 80x_{20} + 80x_{21} \\ & + 80x_{22} + 160x_{23} + 228,57x_{24} + 160x_{25} \\ & + 533,33x_{26} + 160x_{27} + 400x_{28} \\ & + 320x_{29} + 333,33x_{30} + 320x_{31} \\ & + 320x_{32} + 320x_{33} + 320x_{34} + 320x_{35} \\ & + 400x_{36} + 400x_{37} + 320x_{38} + 320x_{39} \\ & + 733,33x_{40} + 160x_{41} + 160x_{42} \\ & + 160x_{43} + 160x_{44} + 160x_{45} + 160x_{46} \\ & + 160x_{47} + 80x_{48} + 1200x_{49} + 1600x_{50} \\ & + 17542,86x_{51} + 500x_{52} \end{aligned} \quad (8)$$

Pored funkcije cilja, model uključuje i sledeća ograničenja:

1. Ograničenja maksimalne redukcije vremena

Za svaki zadatak unapred je određeno koliko njegovo trajanje može maksimalno da se skрати. Na primer:

$$x_{10} \leq 1, x_{11} \leq 1, x_{12} \leq 0,9, \dots, x_9 \leq 1$$

2. Uslov nenegativnosti

Sve promenljive koje predstavljaju trajanja i vremenske pomake zadataka moraju biti nenegativne:

$$x_i \geq 0, y_i \geq 0, \text{ za } i = 1, \dots, 52.$$

3. Vremenska ograničenja (zavisnost između zadataka)

Redosled izvršavanja zadataka uslovljen je logičkim zavisnostima. Na primer, ako zadatak y_{10} ne može da počne dok se ne završi zadatak y_9 , to se izražava nejednačinom: $y_9 + y_{10} - x_9 \geq 15$

5. DISKUSIJA REZULTATA

Na osnovu analize ključnih zadataka projekta, procenjeno je da će njegovo trajanje biti 242 nedelje. Ovaj rezultat pokazuje ukupan vremenski okvir potreban za završetak svih zadataka, uzimajući u obzir njihove međusobne zavisnosti i raspored. Ipak, postoji mogućnost optimizacije tog vremena.

Ukoliko bi se maksimalno smanjio vremenski period izvršavanja projekta na 228 nedelja, uz odgovarajuće povećanje resursa i ubrzanje određenih zadataka, troškovi skraćivanja vremena izvršavanja bi bili 44.325,81. Ovaj iznos predstavlja dodatne troškove koji bi bili neophodni za ubrzanje izvršenja, uključujući povećanje broja radnih sati, angažovanje dodatnih resursa i primenu tehnologija koje omogućavaju brže završavanje zadataka.

6. ZAKLJUČAK

Ovaj rad istražuje primenu linearnog programiranja u optimizaciji planiranja i upravljanja projektima, sa posebnim fokusom na IT projekte i projekte proizvodnje štampanih ploča. Kroz analizu teorijskih osnova, razvoja matematičkih modela i implementacije softverskih rešenja, postignuti su značajni rezultati koji unapređuju proces donošenja odluka i upravljanja resursima.

Razvijeni alat pokazao je visok stepen fleksibilnosti i prilagodljivosti za primenu u različitim industrijama i vrstama projekata.

Rad je uspešno demonstrirao kako primena linearnog programiranja može unaprediti planiranje i upravljanje projektima. Matematički modeli, softverska rešenja i praktične primene pokazali su vrednost optimizacije u smanjenju troškova i vremena, doprinoseći efikasnijem korišćenju resursa i donošenju boljih odluka. Ova istraživanja pružaju solidnu osnovu za dalji razvoj u oblasti upravljanja projektima.

7. LITERATURA

- [1] P.E. Amiolemhen, J. Akpomwomwo „Building Project Activities/Tasks Time Scheduling using a Linear Programming Model“, Department of Production Engineering, University of Benin, Nigeria
- [2] Jovan J. Petrić „Operaciona istraživanja“
- [3] Mokhtar S. Bayaraa, John J. Jarvis, Hanif D. Sherali „Linear Programming and Network Flows“
- [4] Dimitris Bertsimas, John N. Tsitsiklis „Introduction to Linear Optimization“
- [5] Erić D. „Uvod u menadžment“, Ekonomski fakultet, Beograd

Kratka biografija:



Jelena Ubiparip rođena je u Novom Sadu 1995. godine. Osnovne akademske studije završila je 2019. godine na studijskom programu Biomedicinsko inženjerstvo.

Kontakt: jelena.antelj1@gmail.com