

## Примена Зенеровог модела вискоеластичног тела у анализи ослањања седишта

### *Application of the Zener model of a viscoelastic body on seat suspension analysis*

Ивана Степанић, Факултет техничких наука, Нови Сад

#### Студијски програм – ТЕХНИЧКА МЕХАНИКА И ДИЗАЈН У ТЕХНИЦИ

**Кратак садржај** – У раду је анализиран проблем преноса вибрација са шасије на седиште аутомобила при његовом наласку на неравну подлогу. Вискоеластични елемент који моделира суспензију биће описан Зенеровим моделом. Приказани су резултати нумеричких симулација за два карактеристична случаја побуде и то побуда са појединачним поремећајем и стохастичка побуда.

**Кључне речи:** пренос вибрација, Зенеров модел, ослањање седишта

**Abstract** – In this paper, the issue of vibration transfer from the chassis to the car seat when the vehicle encounters an uneven surface is analyzed. The viscoelastic element modeling the suspension is described using the Zener model. The results of numerical simulations are presented for two characteristic excitation cases: excitation with a single disturbance and stochastic excitation.

**Keywords:** vibration transmission, Zener model, seat suspension

**НАПОМЕНА:** Овај рад проистекао је из мастер рада чији ментор је био др Ненад Граховач, ванр. проф.

#### 1. УВОД

Испитиван је пренос вибрација са шасије на седиште аутомобила приликом преласка преко неравне површине. Седишта са суспензијом су од суштинског значаја за ублажавање вибрација и удара који делују на тело [1]. Систем са два степена слободе кретања користи се за описивање преноса вибрација у аутомобилу – од шасије ка седишту, а затим од седишта ка путнику. Овај модел састоји се од два подсистема, при чему сваки укључује масу и вискоеластичне елементе. Маса вискоеластичних елемената се занемарује у поређењу са масама подсистема. Елементи масе и вискоеластичности међусобно су повезани паралелно, што омогућава реалистичну симулацију преноса вибрација кроз систем. Овде се разматрају проблеми принудних осцилација код којих није експлицитно дефинисана принудна сила, већ задато кретање појединих елемената система доводи до појаве нехомогеног члана

слично као код проблема са принудном силом. Келвин-Војтов модел вискоеластичног тела описује се паралелном везом између пригушнице са коефицијентом пригушења  $b_1$  и линеарне опруге крутости  $c_1$ . Када се овом моделу дода серијски повезана опруга крутости  $c_2$ , добија се Зенеров модел вискоеластичног тела.

#### 2. ЗЕНЕРОВ МОДЕЛ

Конститутивна једначина за Зенеров модел је следећег облика

$$p + \tau_p p^{(1)} = E_e(x + \tau_x x^{(1)}), \quad (1)$$

Коефицијенти  $\tau_x, \tau_p$  представљају времена релаксације деформације и напона. У једначини (1) фигурише и константа  $E_e = \frac{EA}{l}$  где коефицијенти  $E_e, A_e, l_e$  означавају модул еластичности, површину попречног пресека и дужину вискоеластичног елемента. Времена релаксације зависе од својстава опруга и пригушнице које чине саставни део овог модела. Веза између времена релаксације, коефицијента пригушења и крутости опруга дата је следећим изразима:

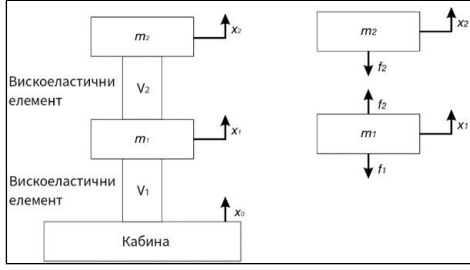
$$\tau_p = \frac{b_1}{c_1 + c_2}, \tau_x = \frac{b_1}{c_1}, E_e = \frac{c_1 c_2}{(c_1 + c_2)}. \quad (2)$$

Обзиром на физичка значења коефицијента пригушења и крутости опруга, из претходног израза се може приметити да коефицијенти задовољавају следећа ограничења:  $E_e > 0, \tau_p > 0, \tau_x > \tau_p$ , из којих се закључује да је време релаксације деформације код Зенеровог модела веће од времена релаксације напона. Понашање неких вискоеластичних материјала не може се на задовољавајући начин описати применом Зенеровог модела. Овој групи материјала припадају полимери, еластомери и тзв. материјали са меморијом, код којих је битно узети у обзир историју деформације. Код фракционог Зенеровог модела, уместо првог извода, уводи се ред извода  $\alpha$  који је у интервалу  $(0,1)$ . То би захтевало другачији математички апарат, што превазилази оквире овог рада.

За систем са два степена слободе кретања, који је приказан на слици 1, могу се написати две диференцијалне једначине кретања које ће се добити коришћењем другог Њутновог закона за кретање масе. Једначине кретања маса  $m_1$  и  $m_2$  су:

$$m_1 x_1^{(2)} = f_2 - f_1, \quad (3)$$

$$m_2 x_2^{(2)} = -f_2. \quad (4)$$



Слика 1. Механички модел пасивног система ослањања седишта са два степена слободе кретања.

где су  $f_1$  и  $f_2$  силе у вискоеластичним елементима. Систем је у стању мировања, па су почетни услови следећег облика:

$$f_1(0) = 0, \quad x_1(0) = 0, \quad x_1^{(1)}(0) = 0, \quad (5)$$

$$f_2(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_2^{(1)}(0) = 0. \quad (6)$$

Пошто су у систему (3) и (4) непознате и силе  $f_1$  и  $f_2$ , потребно је увести и допунске једначине које повезују силе и деформације вискоеластичних елемената.

У наставку ће бити изведене једначине кретања система за случај када су вискоеластични елементи моделирани Зенеровим моделом. Диференцијалне једначине кретања система су једначине (3) и (4), а њима треба придружити следеће конститутивне релације:

$$f_1 + \tau_{f1} f_1^{(1)} = E_{e1} [x_1 - x_0 + \tau_{x1} (x_1^{(1)} - x_0^{(1)})], \quad (7)$$

$$f_2 + \tau_{f2} f_2^{(1)} = E_{e2} [x_2 - x_1 + \tau_{x2} (x_2^{(1)} - x_1^{(1)})], \quad (8)$$

где  $\tau_{f1}$ ,  $\tau_{f2}$ ,  $\tau_{x1}$  и  $\tau_{x2}$  представљају времена релаксације а  $E_{e1}$  и  $E_{e2}$  означавају константе материјала.

При томе важе следећа ограничења:

$$E_{1,2} > 0; \quad \tau_{f1,f2} > 0; \quad \tau_{x1,x2} > \tau_{f1,f2}.$$

Једначинама (7) и (8) одговарају следећи почетни услови:

$$f_1(0) = 0, \quad x_1(0) = 0, \quad x_1^{(1)}(0) = 0, \quad (9)$$

$$f_2(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_2^{(1)}(0) = 0. \quad (10)$$

Тако да су једначине кретања система за случај када су вискоеластични елементи моделирани Зенеровим моделом следеће:

$$m_1 x_1^{(2)} = f_2 - f_1, \quad (11)$$

$$m_2 x_2^{(2)} = -f_2, \quad (12)$$

$$f_1 + \tau_{f1} f_1^{(1)} = E_{e1} [x_1 - x_0 + \tau_{x1} (x_1^{(1)} - x_0^{(1)})], \quad (13)$$

$$f_2 + \tau_{f2} f_2^{(1)} = E_{e2} [x_2 - x_1 + \tau_{x2} (x_2^{(1)} - x_1^{(1)})]. \quad (14)$$

А почетни услови су:

$$f_1(0) = 0, \quad x_1(0) = 0, \quad x_1^{(1)}(0) = 0, \quad (15)$$

$$f_2(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_2^{(1)}(0) = 0. \quad (16)$$

Даље је потребно бездимензионисати систем једначина и увести бездимензијске величине.

Бездимензијске координате су следеће:

$$\bar{x}_0 = \frac{x_0}{L}, \quad \bar{x}_1 = \frac{x_1}{L}, \quad \bar{x}_2 = \frac{x_2}{L}, \quad (17)$$

Бездимензијско време и однос маса су

$$\bar{t} = \frac{t}{T}, \quad T = \sqrt{\frac{L}{g}}, \quad \rho = \frac{m_1}{m_2}. \quad (18)$$

Даље су дате бездимензијске силе

$$\bar{f}_1 = \frac{f_1}{m_1 g}, \quad \bar{f}_2 = \frac{f_2}{m_1 g}. \quad (19)$$

Бездимензијска времена релаксације су

$$\bar{\tau}_{f1} = \frac{\tau_{f1}}{T}, \quad \bar{\tau}_{f2} = \frac{\tau_{f2}}{T}, \quad (20)$$

$$\bar{\tau}_{x1} = \frac{\tau_{x1}}{T}, \quad \bar{\tau}_{x2} = \frac{\tau_{x2}}{T}, \quad (21)$$

Док су константе материјала дате на следећи начин

$$\varepsilon = \frac{E_{e2}}{E_{e1}}, \quad (22)$$

$$L = \frac{m_1 g}{E_{e1}}. \quad (23)$$

Узимајући у обзир претходно наведене бездимензијске величине, бездимензијске једначине кретања маса  $m_1$  и  $m_2$  су:

$$x_1^{(2)} = f_2 - f_1, \quad (24)$$

$$x_2^{(1)} = -\rho f_2, \quad (25)$$

Бездимензионисањем конститутивне једначине Зенеровог модела вискоеластичног тела, добијају се једначине у следећем облику:

$$f_1 + \tau_{f1} f_1^{(1)} = x_1 - x_0 + \tau_{x1} (x_1^{(1)} - x_0^{(1)}), \quad (26)$$

$$f_2 + \tau_{f2} f_2^{(1)} = \varepsilon [x_2 - x_1 + \tau_{x2} (x_2^{(1)} - x_1^{(1)})], \quad (27)$$

и бездимензијски почетни услови за њих су:

$$f_1(0) = 0, \quad x_1(0) = 0, \quad x_1^{(1)}(0) = 0, \quad (28)$$

$$f_2(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_2^{(1)}(0) = 0. \quad (29)$$

У једначинама (24), (25), (26), (27), (28) и (29) изостављена је цртица у ознаци сваке бездимензијске величине.

Даље у раду биће приказани различити случајеви побуде. Систем ослањања возила игра важну улогу у динамичком понашању возила. Једна од главних функција система ослањања возила је да изолују масу шасије од вибрација изазваних неравнинама профила пута и другим спољашњим сметњама. Такође, седишта возила додатно доприносе смањењу вибрација. У свакодневном саобраћају, аутомобили савладавају различите врсте неравнина на путу које могу бити

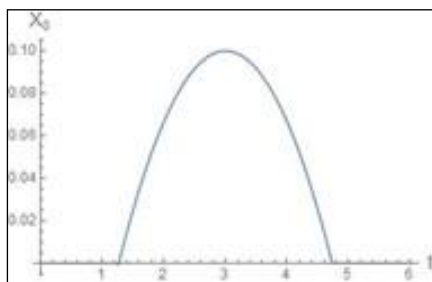
насумичне или прављене за одређену сврху. Неопходно је анализирати неколико параметара како би се предвидело понашање возила при савладавању препреке на путу. Са једне стране, анализирају се димензије и геометрија избочине или удубљења на путу, а са друге стране се анализирају брзина и карактеристике ослањања возила. Неравнине на путу које могу бити направљене за одређену сврху су, на пример, избочине за смањење брзине.

Постоје три типа побуде: побуда са појединачним поремећајем, периодичне и стохастичке. У овом раду анализирани су две врсте побуде са појединачним поремећајем, то су избочина и удубљење. Прелазак возила преко препреке доводи до благог пада брзине, на тај начин се возач приморава да смањи брзину како би се избегле незгоде и оштећење возила [3].

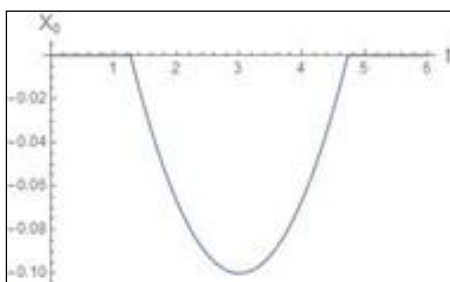
Функција  $x_0(t)$  представља принуду, односно кретање шасије при наиласку на неравне подлоге, при чему се вибрације са шасије преносе на седиште аутомобила. Функција  $x_1(t)$  приказује како се вибрације смирују у времену приликом преласка возила преко избочине, односно удубљења.

У овом случају, профил препреке побуђује динамику компоненти возила и вертикално кретање зависи од врсте препреке, односно узима се у обзир дужина и висина препреке. Посматра се само вертикално оптерећење, уздужно и попречно оптерећење се сматрају занемарљивим у односу на оптерећење у вертикалном правцу [4].

У наставку биће приказани графици за побуду са појединачним поремећајем. Моделована је као параболола  $x_0(t) = at^2 + bt + c$ . На слици 2 је приказан график за побуду типа избочина, за вредности  $a = -0.033 \left[ \frac{m}{s^2} \right]$ ,  $b = 0.2 \left[ \frac{m}{s} \right]$  и  $c = -0.2 [m]$ ,



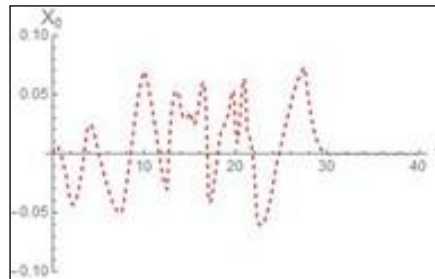
Слика 1. Побуда са појединачним поремећајем: избочина.



Слика 3. Побуда са појединачним поремећајем: удубљење.

а на слици 3 је приказан график за побуду типа удубљење за вредности  $a = 0.033 \left[ \frac{m}{s^2} \right]$ ,  $b = -0.2 \left[ \frac{m}{s} \right]$  и  $c = 0.2 [m]$ , видети [4].

На основу побуде из рада [2], генерисана је произвољна функција приказана на слици 4 и она ће касније бити коришћена у резултатима.



Слика 4. Насумична неравнина на путу [2].

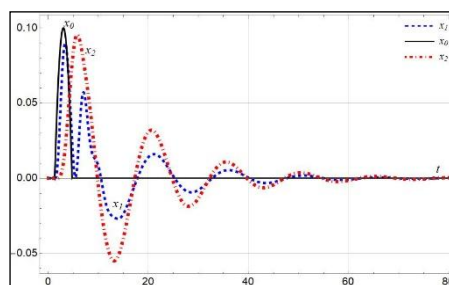
У наставку ће бити приказани резултати нумеричких симулација кретања маса  $m_1$  и  $m_2$  за конкретне вредности параметара система и за различите побуде.

### 3. РЕЗУЛТАТИ НУМЕРИЧКИХ СИМУЛАЦИЈА

У овом делу биће приказано нумеричко решавање једначина кретања маса  $m_1$  и  $m_2$  за конкретне вредности параметара система и за три различите врсте побуде. Нумеричке вредности параметара система седишта са суспензијом дати су у Табели 1 рада [2].

Бездимензијска решења приказана у наставку рада су добијена решавањем система (24), (25), (26) и (27) са почетним условима (28) и (29) за изабране вредности параметара система.

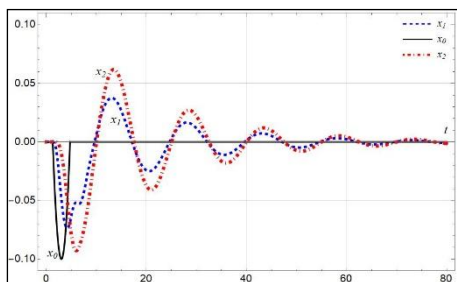
На слици 5 приказано је решење за  $\rho = 0.35$ ,  $\tau_{x1} = 1.85$ ,  $\tau_{x2} = 1.1$ ,  $\tau_{f1} = 0.49$  и  $\tau_{f2} = 0.8$ . Анализира се кретање система које је описано Зенеровим моделом, при чему су једначине дате у бездимензијској форми. У овом случају, посматра се понашање система приликом преласка возила преко избочине.



Слика 5. Бездимензијске координате маса  $m_1$  и  $m_2$  за побуду типа избочина

На графику се може видети како се систем понаша приликом преласка возила преко препреке. Функција  $x_0(t)$  представља неравнину на путу, односно избочину преко које возило прелази током кретања. Такође, може се уочити како се амплитуде смањују током времена.

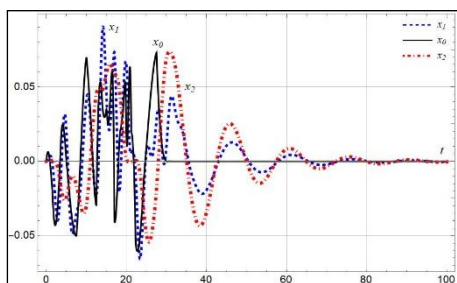
На следећој слици приказано је решење за  $\rho = 0.35$ ,  $\tau_{x1} = 1.1$ ,  $\tau_{x2} = 1.85$ ,  $\tau_{f1} = 0.81$  и  $\tau_{f2} = 0.49$ . Анализира се понашање система приликом наиласка возила на удубљење



Слика 6. Бездимензијске координате маса  $m_1$  и  $m_2$  за побуду типа удубљења.

Претходни график приказује наилазак возила у удубљење на путу, које је на графику означено са  $x_0$ . Након изласка возила из удубљења, може се видети како се осцилације пригушују.

На слици 7 је приказано решење за произвољну побуду. Бездимензијске вредности параметара система су  $\rho = 0.35$ ,  $\tau_{x1} = 1.85$ ,  $\tau_{x2} = 1.1$ ,  $\tau_{f1} = 0.49$  и  $\tau_{f2} = 0.81$ .



Слика 2. Бездимензијске координате маса  $m_1$  и  $m_2$  за произвољну побуду.

На слици 7 је приказана произвољна побуда која је означена са  $x_0$ . Ова побуда може бити и избочина и удубљење на путу, преко којих возило прелази током кретања. На графику се види да амплитуде почињу да опадају тек када возило пређе преко свих препрека.

#### 4. ЗАКЉУЧАК

У раду је проучен проблем преноса вибрација са шасије на седиште аутомобила при његовом наиласку на неравну подлогу. Да би се ове вибрације изоловале и како би се спречио њихов пренос на људско тело, користи се седиште са суспензијом. Представљен је модел са два степена слободне кретања, анализирано је кретање седишта и кретање тела возача у непокретном координатном систему. Описан је механички модел на основу којег су изведене диференцијалне једначине кретања. Једначине су дате прво у димензијској форми, а након тога су уведене бездимензијске величине и једначине су дате у бездимензијском облику. Принудна сила у овом проблему није експлицитно задата, али је задато кретање елемента система које проузрокује нехомогени члан у диференцијалној једначини осцилаторног кретања. Принудне осцилације се не амортизују при постојању отпора и њихова фреквенција је једнака фреквенцији принудне силе и она не зависи од карактеристика система који осцилује. Такође, и амплитуда принудних осцилација не зависи од почетних услова. Приказани су резултати и они су добијени нумеричким решавањем система

диференцијалних једначина, коришћењем програмског пакета Wolfram Mathematica. Анализиране су три врсте побуде: избочина, удубљење и произвољна побуда. Дати су резултати нумеричких симулација за ове три врсте побуда. На основу добијених графичких приказа може се закључити да динамичко понашање возила зависи од облика побуде, карактеристика система и изабраних параметара модела. Код свих случајева приметно је да померање седишта брже реагује на побуду, док померање тела возача има израженије и дуже трајање осцилација. Величина и облик амплитуда зависи од типа побуде, као и од параметара вискоеластичних елемената. Након проласка преко неравнина профила пута, систем наставља да осцилује, при чему се осцилације постепено смањују до стационарног стања.

#### 5. ЛИТЕРАТУРА

- [1] S. Aisyah Adam, N. A. Abdul Jalil, K. A. Md Razali, Y. G. Ng and M. F. Aladdin, "Mathematical Model of Suspension Seat-Person Exposed to Vertical Vibration for Off-Road Vehicles", *International Journal of Automotive and Mechanical Engineering*, Volume 16, Issue 2 pp. 6773-6782, June 2019.
- [2] Do Xuan Phu, Van Mien, Phan Huu Thanh Tu, Ngoc Phi Nguyen, Seung-Bok Choi, "A New Optimal Sliding Mode Controller with Adjustable Gains based on Bolza-Meyer Criterion for Vibration Control", *Journal of Sound and Vibration*, Volume 485, 115542, October 2020.
- [3] Ayoub Benhiba, Abdelmajid Bybi, Rajae Alla, Drissi Hilal and Chater, El Ayachi, "Investigation of Vibrations Energy Harvesting from Passive Car Suspension Using Quarter Car Model Under Bump Excitation", *The International Conference on Energy and Green Computing (ICEGC'2021)*, Meknes, Morocco, Edited by Benhala, B.; Mansouri, K.; Raihani, A.; Qbadou, M.; *E3S Web of Conferences*, Volume 336, id.00053, December 2022.
- [4] Dimitrios Koulocheris and Clio Vossou, "A Comparative Study of Integrated Vehicle-Seat-Human Models for the Evaluation of Ride Comfort", *Vehicles*, Volume 5, Issue 1, pp. 156-176; 2023.

#### Кратка биографија:



**Ивана Степанић** рођена је у Лозници 1996. год. Средњу графичку школу завршила је 2015 год. у Лозници. Основне академске студије завршила је 2019 год. на Факултету техничких наука. Студијски програм мастер студија Техничка механика и дизајн у техници на Факултету техничких наука уписала је 2019.год.

**Контакт:**

[stepanic.ivana96@gmail.com](mailto:stepanic.ivana96@gmail.com)