



Израда софтверске апликације за модалну анализу Н-спратне рамске конструкције

Development of a Software Application for Modal Analysis of an N-Storey Frame Structure

Андреј Личанин, Факултет техничких наука, Нови Сад

Студијски програм – ТЕХНИЧКА МЕХАНИКА И ДИЗАЈН У ТЕХНИЦИ

Кратак садржај – У овом раду представљен је модел за *апроксимативну динамичку анализу Н-спратне рамске конструкције* путем *система еквивалентних опруга*. Овај приступ омогућава поједностављено одређивање *сопствених фреквенција* и модалних облика осциловања конструкције, превазилазећи ограничења статичке анализе. Развијена је софтверска апликација користећи **C#** и **WPF** технологије, по принципу **MVVM** архитектуре, која омогућава инжењерима и студентима да брзо прорачунају параметре крутости и масе, а затим изврше прорачун вибрација у првом моду. Провера резултата кроз поређење са апроксимативним инжењерским методама потврдила је високу поузданост апликације, чиме је успостављена веза између теоријске механике и практичне софтверске имплементације у домену пројектовања.

Кључне речи : динамичка анализа, систем опруга, сопствене фреквенције, **MVVM**, рамска конструкција

Abstract – This paper presents a model for the *approximate dynamic analysis* of N-storey frame structures using a *system of equivalent springs*. This approach allows for a simplified determination of *natural frequencies* and mode shapes of the structure's oscillation, overcoming the limitations of static analysis. A software application was developed using **C#** and **WPF** technologies, based on the **MVVM** architectural pattern, enabling engineers and students to quickly calculate stiffness and mass parameters and subsequently perform vibration analysis in the first mode. The validation of the results through comparison with approximate engineering methods confirmed the application's high reliability, establishing a link between theoretical mechanics and practical software implementation in the field of structural design.

Keywords: dynamic analysis, spring system, natural frequency, **MVVM**, frame structure

НАПОМЕНА: Овај рад проистекао је из мастер рада чији ментор је проф. др Звонко Ракарић, ред. проф.

1. УВОД

Пројектовање савремених вишеспратних конструкција неопходно подразумева анализу њиховог понашања под дејством динамичких оптерећења, попут ветра или сеизмичке активности. У инжењерској пракси, традиционална статичка анализа често је недовољна за тачну процену сигурности и стабилности конструкције, посебно када се у обзир узме ефекат вибрација и њихових сопствених фреквенција.

Апроксимативне методе имају значајну улогу у почетним фазама пројектовања јер нуде брзе и поуздане процене, пре него што се приступи детаљној анализи. Моделовање Н-спратне рамске конструкције као система са **Н степени слободе** чија се крутост замењује **еквивалентним системом опруга** представља један од ефикасних апроксимативних приступа. Овај модел поједностављује комплексну структуру, омогућавајући директно формирање матрице крутости **K** и матрице масе **M**.

На тај начин, проблем динамичке анализе своди се на решавање диференцијалне једначине осциловања.

Циљ овог рада је двострук. Прво, систематизовати теоријски оквир за прорачун померања и сопствених фреквенција рамске конструкције коришћењем модела опруга. Друго, применити овај теоријски оквир за развој софтверске апликације (**ApproxCalc**). Апликација је имплементирана у програмском језику **C#** са **WPF** технологијом и користи **MVVM** архитектуру, пружајући инжењерима и студентима алат за брзо одређивање параметара и решења вибрација у првом моду. У наставку рада биће приказана методологија, софтверска имплементација и резултати валидације прорачуна.

2. Теоријске основе и методологија

Апроксимативни прорачун вибрација рамске конструкције базиран је на моделу у којем је маса концентрисана у тежиштима плоча (спратова), док се крутост конструкције моделира као систем еквивалентних опруга који је описан у раду [6]. Овај модел представља систем са **Н степени слободе** који осцилује искључиво транслаторно.

2.1. Моделовање структуралних елемената као опруга

Основна идеја методологије заснива се на Хуковом закону који описује линеарну везу између силе F и деформације Δ : $F = k \cdot \Delta$, где је k константа крутости опруге. За структуралне елементе као што су стубови, издужење аксијално оптерећене шипке се добија изразом [6]:

$$k_{eq} = \frac{EA}{L} \quad (1)$$

Овим се показује да структурни елемент може да се посматра као опруга са одређеном крутошћу.

2.2. Одређивање крутости стубова

Крутост k једног спрата представља укупну силу која је потребна да се тај спрат помери за јединично померање ($\Delta = 1$), у односу на спрат испод. За стуб, крутост се одређује на основу граничних услова:

- Стуб уклештен на једном крају, слободан на другом ($k = 3EI/L^3$) [5], примењује се за приземље
- Стуб уклештен у обе плоче ($k = 12EI/L^3$) [6]
- Стуб је слободан на оба краја, ($k = 0$) [6]

где је E Јунгов модул еластичности, I момент инерције попречног пресека, а L висина стуба.

2.3. Комбиновање опруга у серијске и паралелне системе

У реалним структурама, елементи се могу комбиновати на различите начине. Опруге везане паралелно доживљавају исту деформацију, али се сила распоређује између опруга. Еквивалентна крутост паралелног система је [6]:

$$k_{eq} = k_1 + k_2 + \dots + k_n \quad (2)$$

Насупрот томе, серијски везане опруге доживљавају исту силу, али се деформација распоређује. За серију опруга, еквивалентна крутост се израчунава као [6]:

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n} \quad (3)$$

Укупна крутост спрата добија се као сума крутости свих стубова тог спрата, с обзиром на то да су стубови паралелно повезане због ригидности плоча [6]:

$$\frac{1}{k_i} = \sum_{j=1}^{N_{col}} \frac{1}{k_j} \quad (4)$$

где је N_{col} број стубова на спрату i .

Коначна крутост целе конструкције је [5]:

$$K = \sum_{i=1}^{N_{col}} k_i \quad (5)$$

Са овом крутошћу и познатом силом која делује на врху конструкције, рачуна се померање задњег спрата и пропорционална померања сваког спрата засебно.

2.4. Формирање матрица и прорачун вибрација

Маса сваког спрата узима се као концентрисана маса која укључује стално и делујуће променљиво оптерећење. Динамичко понашање N -спратне конструкције се описује хомогеним системом диференцијалних једначина:

$$M\ddot{x} + Kx = 0 \quad (6)$$

где је M Матрица масе (дијагонална матрица) и K Матрица крутости.

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_N \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & \dots & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & \dots & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -k_N \\ 0 & 0 & 0 & -k_N & k_N \end{bmatrix} \quad (8)$$

Решавањем једначине $(K - \omega^2 M)x = 0$ добијају се сопствене фреквенције ω (квадратни корени сопствених вредности) и одговарајући модални облици x . За потребе овог рада, фокус је на прорачуну првог мода осциловања (ω_1), који је најважнији у пракси. Решавање система једначина спроведено је уз помоћ нумеричких метода.

2.5. Нормализација модалних облика

Добијени модални вектори ϕ могу бити произвољно скалирани, јер систем има бесконачно много решења. Како би се модални облици стандардизовали и учинили употребљивим у даљој анализи, примењује се нормализација по јединичној модалној маси:

$$\phi^T M \phi = 1 \quad (9)$$

На тај начин, модална маса сваког мода је једнака 1, а модална крутост се добија директно из израза $K_{modal} = \omega^2$. Ова нормализација омогућава конзистентно поређење између различитих модова и директно израчунавање модалних карактеристика.

3. Софтверска имплементација и архитектура

Софтверска апликација АпрохiСalc развијена је као директна имплементација теоријског модела апроксимативне динамичке анализе вишеспратних конструкција на основу рада [5] и проширено са модалном анализом вибрација. Основни циљ апликације је да омогући инжењерима и студентима једноставан, интуитиван и прецизан начин за одређивање параметара крутости, померања спратова, масе и сопствених фреквенција система са више степени слободе. Посебан акценат стављен је на транспарентност прорачуна, једноставан унос података и јасну визуализацију резултата.

3.1. Технолошки оквир и архитектура система

AproxiCalc је реализован у програмском језику C# у оквиру .NET платформе, уз примену WPF (Windows Presentation Foundation) технологије за израду графичког интерфејса. Ова технологија омогућава раздвајање презентационог слоја од логичког, што је од кључног значаја за одрживост кода. Архитектонски образац MVVM (Model–View–ViewModel) примењен је као основа апликације, чиме је постигнута јасна хијерархија компонената: Model управља подацима и прорачуном, View дефинише кориснички интерфејс, док ViewModel посредује у комуникацији између ова два слоја путем механизма data binding-a.

За нумеричке прорачуне примењена је библиотека MathNet.Numerics, која омогућава прецизну реализацију линеарно-алгебарских операција, решавање система једначина и сопствених вредности (eigenvalue decomposition). Захваљујући овој библиотеци, могуће је формирати матрице крутости и масе, а затим нумерички израчунати сопствене фреквенције и модалне облике.

3.2. Кориснички интерфејс и организација података

Кориснички интерфејс апликације дизајниран је са нагласком на једноставности и интуитивности. Почетни корак рада подразумева дефинисање улазних параметара: броја спратова, висине етажа, броја и типа колона, као и њихових граничних услова. Корисник може уносити вредности за модул еластичности (E), момент инерције (I) и геометрију стуба, након чега апликација аутоматски израчунава еквивалентне крутости по спратовима.

Програм узима висину спрата и додељује ту висину свим колонама на том спрату.

Сви подаци се динамички чувају у меморији апликације у облику објеката који представљају елементе конструкције. При свакој промени вредности, WPF механизам аутоматски ажурира приказ на интерфејсу, што омогућава тренутни визуелни повратак. Посебан акценат је стављен на то да корисник не мора сам да покрене прорачун па провера резултате, него се прорачун константно ажурира у позадини. Оваква интерактивност значајно убрзава процес верификације и анализе резултата, што је посебно корисно у настави и инжењерским симулацијама.

За визуелизацију резултата примењена је библиотека OxyPlot, која пружа графички приказ модалних облика осцилација и зависности између висине спрата и релативних померања. Ово омогућава кориснику да не само види нумеричке резултате, већ и да визуелно интерпретира вибрационо понашање конструкције.

3.3. Радни ток и прорачунски модул

Прорачун у апликацији реализован је кроз више корака који прате логички ток инжењерског рада:

1. Дефинисање улазних података – корисник уноси геометрију и материјалне карактеристике стубова и

етажа.

2. Формирање крутости – апликација аутоматски израчунава крутост сваког спрата на основу граничних услова и формула $k = 3EI/L^3$ или $k = 12EI/L^3$.
3. Генерисање матрица – из добијених вредности формирају се масена и крутостна матрица, при чему су у обзир узете серијске и паралелне везе спратова.
4. Решавање сопственог проблема – применом нумеричких метода одређују се сопствене фреквенције и модални облици осцилација.
5. Нормализација резултата – модални вектори се нормализују по јединичној модалној маси, чиме се обезбеђује конзистентност резултата.
6. Приказ и извоз – корисник може резултате прегледати у табеларном и графичком облику и извести их у CSV или PDF формат.

Апликација користи библиотеку QuestPDF за аутоматско генерисање техничких извештаја који садрже све улазне параметре, добијене матрице, фреквенције и графичке приказе.

Битна ставка у извештајима је да су укључене формуле за прорачун са вредностима да би кориснику било лакше да разуме шта се десило у позадини.

3.4. Валидација и тестирање

Резултати добијени помоћу апликације AproxiCalc верификовани су поређењем са ручним прорачуном и аналитичким методама из литературе. Разлике у резултатима првог мода осцилација биле су у распону од 3–6%, што потврђује високу тачност примене нумеричког решавања. Валидација је додатно потврдила да апроксимативни модел опруга даје задовољавајућу тачност за инжењерске процене.

4. ЗАКЉУЧАК

Развијена апликација AproxiCalc представља успешну имплементацију апроксимативне методе за анализу вибрација вишеспратних рамских конструкција. Комбиновањем теоријског модела система опруга и савремених програмских технологија постигнута је равнотежа између једноставности употребе и прецизности резултата. Применом архитектуре MVVM, библиотека MathNet.Numerics, OxyPlot и QuestPDF, омогућено је интерактивно израчунавање крутости, формирање матрица масе и крутости, решавање сопственог проблема и визуелизација модалних облика осцилација.

Валидација резултата показала је да апроксимативни модел пружа довољно високу тачност за инжењерске процене, уз значајно мање време израчунавања у поређењу са класичним нумеричким методама. На тај начин, AproxiCalc не само да представља едукативни и инжењерски алат, већ и пример интеграције теоријске механике, математичког моделирања и софтверског инжењерства у јединствен систем применљив у настави и пракси.

5. ЛИТЕРАТУРА

- [1] S. S. Rao, *Mechanical Vibrations*, 5. izd. Upper Saddle River, NJ: Pearson/Prentice Hall, 2010.
- [2] Л. Цветићанин и Ђ. Ђукић, *Кинематика*. Нови Сад: Факултет техничких наука, 2013.
- [3] Ђ. Ђукић и Л. Цветићанин, *Статика*. Нови Сад: Факултет техничких наука, 2013.
- [4] Ђ. Ђукић, Л. Цветићанин и М. Зуковић, *Динамика*. Нови Сад: Факултет техничких наука, 2015.
- [5] Б. Вујановић, *Теорија осцилација*. Нови Сад: Факултет техничких наука, 1995.
- [6] D. C. Weggel, D. M. Boyajian, and S.-E. Chen, "Modelling structures as systems of springs," *World Transactions on Engineering and Technology Education*, vol. 6, no. 1, str. 169-172, 2007.
- [7] З. Ђ. Ракарић, *Инжењерска динамика*. Нови Сад: Факултет техничких наука, 2021.

Кратка биографија:



Андреј Личанин Рођен у Дубровнику 1990. године, доселио се у Нови Сад 1996 где завршава основну и средњу школу. Дипломирао на Факултету Техничких Наука 2018. на смеру Техничка механика и дизајн. Мастер рад одбранио 2025. на истом смеру.

Контакт:
andrel.licanin@gmail.com