

МАТЕМАТИЧКЕ ОСНОВЕ РАВНОТЕЖЕ ИНТЕРЕСА**MATHEMATICAL FOUNDATIONS OF BARGAINING EQUILIBRIUM**

Мара Весић, Факултет техничких наука, Нови Сад

Област- МАТЕМАТИКА У ТЕХНИЦИ

Кратак садржај – Овај рад истражује математичке основе равнотеже интереса и представља допринос разумевању сложених интеракција у системима у којима се интереси различитих актера преплићу и међусобно утичу. Анализа је усмерена на концепт равнотеже интереса, схваћен као један од темељних елемената теорије игара. Главни циљ рада је да испита на који начин модели теорије игара могу допринети бољем разумевању стратешких интеракција међу различитим учесницима — као што су финансијски конкуренти на тржишту — и да олакшају доношење информисанијих одлука у финансијским и друштвеним контекстима.

Кључне речи – равнотежа интереса, теорија игара, стратегија, Нешова равнотежа.

Abstract – This paper explores the mathematical foundations of bargaining equilibrium, offering a contribution to the understanding of complex interactions in systems where the interests of different actors intersect and influence one another. The analysis centers on the concept of interest equilibrium, understood as a fundamental element of game theory. The primary goal is to examine how game-theoretic models can enhance our understanding of strategic interactions among various players—such as financial competitors in a market—and support more informed decision-making in financial and social contexts.

Keywords – balance of interests, game theory, strategy, Nash equilibrium

1. УВОД

Основна сврха овог рада је да пружи теоријски оквир кроз који се може анализирати равнотежа интереса, уз употребу математичких алата који омогућавају формализацију овог концепта. У том смислу, рад се ослања на различите математичке приступе, укључујући теорију игара, како би се креирали модели који не само да описују равнотежу интереса, већ омогућавају и анализу стабилности те равнотеже у различитим условима. Кроз ову анализу, биће могуће идентификовати кључне факторе који утичу на успостављање и одржавање равнотеже.

НАПОМЕНА:

Овај рад проистекао је из мастер рада чији је ментор била др Марија Делић, доцент.

Један од циљева овог истраживања је и да се кроз математичку анализу понуде решења за оптимизацију равнотеже интереса у ситуацијама где долази до конфликта или неслагања између различитих страна системима који се суочавају са брзим променама и комплексним интеракцијама међу различитим актерима.

2. ОСНОВНИ ПОЈМОВИ

Теорија игара представља математички оквир који се користи за анализу и разумевање стратегијских интеракција међу рационалним актерима. Основе теорије игара леже у формализацији ситуација у којима се доносе одлуке, при чему се анализирају различите стратегије које актери могу усвојити, њихови потенцијални исходи и равнотеже које могу настати из међусобних интеракција.

Игра представља упрошћени модел конфликта који обухвата укупност правила понашања учесника у игри (играча), која опредељује њихове могуће потезе као и потенцијалне резултате њиховог избора.

Играчи могу бити појединци, групе, предузећа, војне формације... При томе циљ сваког од учесника у игри јесте да постигне решење које му обезбеђује остваривање најповољнијег могућег резултата.

Резултат игре је исход који се постиже као последица одлука које учесници доносе током игре. Резултат представља последицу њихових поступака и интеракција, која одређује ко је добио, ко изгубио или како су подељени добици.

Један од основних појмова у теорији игара је концепт стратегије. **Стратегија** представља комплетан план акција које актер може предузети у сваком могућем стању игре, узимајући у обзир све информације које су му доступне у датом тренутку.

Стратегије могу бити:

- **Чисте**, када актер увек бира исту акцију у одређеном стању.
- **Мешовите**, када актер насумично бира између неколико могућих акција према одређеној расподели вероватноће.

Ова дистинкција између чистих и мешовитих стратегија омогућава анализу комплекснијих ситуација у којима актери користе елементе случајности како би избегли предвидивост својих потеза и тако повећали своје шансе за успех.

Равнотежа интереса је стање у којем се супротстављени интереси различитих страна усклађују путем преговора, законских оквира, регулатива или других механизма, како би се постигло праведно и одрживо решење које узима у обзир добробит свих укључених субјеката, али не фаворизује ниједну страну на штету друге.

У теорији игара, екстензивна и нормална (или стратешка) форма приказивања игара представљају два начина моделовања игара и избора стратегија међу играчима. Ова два приказа помажу у анализи стратегија и доношењу одлука играча у различитим врстама игара. Разматрана игра може бити приказана:

- графичким путем, дрветом игре (екстензивна форма),
- табеларно, матрицом игре (нормална форма).

Екстензивна форма се примењује за игре код којих се приказују информације играча о потенцијалним одговорима противника на њихов избор појединачних стратегија. За такве игре је карактеристично да се резултат свих потеза у току неке игре обрачунава тек на крају игре, када се обави и предвиђени број потеза. Оваква врста игре коју називамо екстензивног облика представља се преко одговарајућег стабла игре у који се уписују одабрани потези играча. Играчи се крећу секвенцијално представљени у облику дрвета.

Нормална форма представљања игре примењује се у ситуацији потпуне информисаности о потенцијалним резултатима одабраних стратегија од стране играча. Код овакве врсте игре коју називамо игром у нормалној (матричној) форми за све алтернативне комбинације одабраних стратегија од стране играча унапред су позната плаћања односно резултат игре. Користи се за приказ када се играчи крећу истовремено, односно доносе одлуке у истом тренутку.

Нулта сума значи да је на крају игре збир једнак нули, односно да добитак једног играча одговара губитку другог. Будући да су интереси играча строго конфликтни, претпоставља се да је при сваком резултату игре, збир њихових корисности једнак нули, $u_1 + u_2 = 0$. Следи да је корисност другог играча једнака $u_2 = -u_1$, због чега уместо паровима корисности (u_1, u_2) резултате игре краће приказујемо само корисностима првог играча (u_1) односно $(u_1, -u_1)$.

Игра не-нулте суме описује случајеве када су интереси играча делимично конфликтни а делимично сагласни. Могући резултати нису једнаки константи већ варирају, тако да су за све учеснике у игри нека

решења повољнија од других решења. Играчи усклађују своје интересе да би повећали њихов заједнички интерес док конфликт настаје у тренутку његове деобе. Циљ игре је обично да се избегне креирање суме која је једнака нули, док оба играча покушавају да оптимизују своје шансе за победу, односно да увећају своју корисност.

3. ТЕОРИЈА ИГАРА И РАВНОТЕЖА ИНТЕРЕСА

Повезаност равнотеже интереса са теоријом игара је дубока и фундаментална, јер теорија игара пружа математички оквир за анализу стратегијских интеракција међу рационалним актерима, где исход зависи не само од појединачних одлука једног актера, већ и од одлука других актера унутар система. У основи сваког система у коме постоји више учесника са различитим интересима лежи потреба да се њихови интереси ускладе, како би систем достигао стабилно стање.

Најосновнији концепти решења проблема у Теорији игара издвајају се:

1. Избор доминантних стратегија
2. Нешова равнотежа
3. Парето оптималност
4. Метод минмакс стратегије.

Појам доминације односи се на случајеве када је једна стратегија боља од друге стратегије, независно од потеза противника.

Дефиниција: Нека су s_i и s'_i две стратегије играча i , и нека је S_{-i} скуп стратегијских профила свих осталих играча, а u_i функција корисности играча i , тада важи:

- Стратегија s_i **стриктно доминира** стратегију s'_i за играча i ако је очекивани исход играња стратегије s_i строго бољи од играња стратегије s'_i , за све могуће потезе других играча. Математички, ово се може записати као:

$$u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s'_i, s_{-i}), \quad \forall s_{-i} \in S_{-i}.$$

- Стратегија s_i **слабо доминира** стратегију s'_i за играча i , ако је исход играња стратегије s_i барем једнако добар као играње стратегије s'_i за све могуће потезе других играча, и стриктно бољи за бар један могући потез противника. Математички ово се може записати као:

$$u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i}), \quad \forall s_{-i} \in S_{-i},$$

и за бар једно $s_{-i} \in S_{-i}$ важи

$$u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s'_i, s_{-i}).$$

Дефиниција (Нешова равнотежа): Нека је s_{-i} профил стратегије свих играча без стратегије i -тог. Онда је комплетан стратешки профил $s = (s_i, s_{-i})$. Најбољи одговор играча на стратешки профил s_{-i} је $s_i^* \in S_i$ ако и само ако $\forall s_i \in S_i, u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i})$.

Стратешки профил $s = (s_1, \dots, s_n)$ је Нешов еквилибријум ако је за сваког играча $i \in \{1, \dots, n\}$, s_i најбољи одговор на осталих s_{-i} .

Парето оптималност: Посматрајући игру споља ми не можемо преферирати ниједног играча, односно интереси свих су нам једнако битни. Понекад је један исход O барем толико добар за сваког играча као исход O' а постоји бар један играч који строго преферира исход O у односу на O' . Посматрајући игру споља у наведеном случају чини се разумним рећи да је исход O бољи од исхода O' . Онда кажемо да исход O Парето доминира исход O' . Пар исхода (u_1, u_2) је Парето оптимално решење ако не постоји ни један други исход који га Парето доминира.

Минимакс стратегија је метода која се користи за доношење одлука у ситуацијама са сукобљеним интересима, као што су игре са нултом сумом, где један учесник покушава да минимизује максимални могући губитак. Ова стратегија подразумева одабир решења које минимизује најнеповољнији исход.

4. АНАЛИЗА КОНКРЕТНИХ МОДЕЛА РАВНОТЕЖЕ ИНТЕРЕСА КРОЗ ИГРЕ ПРЕГОВАРАЊА

Анализа равнотеже интереса кроз игре преговарања је процес истраживања ситуација у којима различити актери (играчи) покушавају да оптимизују своје циљеве, док су њихови интереси међусобно повезани кроз одређена ограничења.

4.1. Нешов модел преговарања

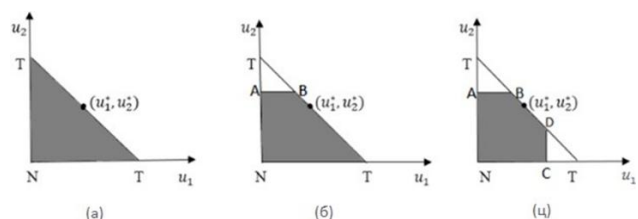
Нешов модел преговарања се фокусира на проналажење равнотеже интереса између играча, где сваки играч оптимизује своју циљну функцију узимајући у обзир стратегије других играча. Посматрајмо два предузећа, А и В, која користе заједнички ресурс за производњу. Свако предузеће има циљну функцију профита која зависи од количине ресурса коју користи. Преговори могу да се заврше различитим исходима, а скуп свих резултата које појединци могу да остваре представља доступну област (D). Што значи да је ресурс ограничен, а прекомерна употреба ресурса може довести до тачке неуспеха $N = (n_1, n_2)$ у којој ниједно предузеће не остварује профит због исцрпљивања ресурса, Слика 1.

Преговарачи ће посматрати само Парето оптимална решења (у којима обе стране постижу боље исходе у односу на неефикасна решења). Скуп свих Парето оптималних тачака чини преговарачки скуп (P). Где тачке тог скупа приказујемо паровима корисности (u_1, u_2) . Успешан завршетак преговора подразумева кооперативно понашање јер се само обостраном спремношћу на уступке може унапредити преговарачки исход.

У случају да дође до договора, преговарачи остварују добитке који су једнаки $(u_1 - n_1)$ за првог и $(u_2 - n_2)$ за другог појединца. Зато претпоставимо да се у скупу P налазе најмање две тачке које појединци различито преферирају, па се поставља проблем како да предвидимо тачку њиховог договора (u_1^*, u_2^*) . Неш је поставио следећа четири услова:

- **Парето оптимум (ПО):** Прихваћено решење мора бити јединствено Парето оптимално решење.
- **Симетричност (С):** Ако доступна област садржи тачку (a, b) онда мора да садржи и тачку (b, a) и обрнуто. Ако је тачка неуспеха $n_1 = n_2$ онда је тачка договора такође симетрична $u_1^* = u_2^*$.
- **Независност од еквивалентних презентација (ЕП):** Ако су две презентације проблема еквивалентне у смислу исхода, рационална одлука треба да остане иста, без обзира на начин формулисања проблема, значи ако применом позитивне линеарне трансформације њихове функције корисности трансформишемо у нове функције тачка договора остаје иста али је сада изражена у корисностима мереним на новим скалама.
- **Независност од ирелевантних алтернатива (ИА):** Ако су тачке неуспеха, проблема А и В једнаке, а преговарачки скуп проблема В, P_B , је садржан у преговарачком скупу проблема А, $P_A \subset P_B$. Тада ако се тачка договора проблема А, налази унутар преговарачког скупа проблема В, онда она представља и тачку договора проблема В, $(u_1^*, u_2^*)_A = (u_1^*, u_2^*)_B$.

У наставку наводимо један пример на коме илустративно објашњавамо претходно уведене услове, Слика 1.



Слика 1: Пример услова независности од ирелевантних алтернатива

Тачка неспоразума је (0,0), а преговарачи су неутрални према ризику. У случају (а) где имамо симетричну преговарачку игру доступна област је приказана површином троугла NTT, а дуж TT представља преговарачки скуп па је на основу услова ПО и С решење игре (u_1^*, u_2^*) . Увођењем одређених ограничења којима се доступна област драстично смањује, у случају (б) је приказана површином трапеза NTBA, чија страница VT представља преговарачки скуп, док је у случају (в) доступна област површина

NCDBA, а преговарачки скуп дуж BD. Преговарачки скупови проблема (б) и (ц) су садржани у преговарачком скупу проблема (а), односно, дужи VT и BD представљају сегменте дужи TT. Такође дужи VT и BD садрже претходно утврђену тачку договора (u_1^*, u_2^*) . На основу услова ИА следи да је тачка (u_1^*, u_2^*) такође решење и преговарачких проблема (б) и (ц).

Ако су задовољени наведени услови (ПО, С, ЕП, ИА) онда тачка договора (u_1^*, u_2^*) представља решење функције $\max(u_1 - n_1)(u_2 - n_2)$ у преговарачком скупу под условом да у њему постоје тачке где $u_1 > n_1$ и $u_2 > n_2$. Добијено решење се назива Нешовим решењем програмирања.

5. ЗАКЉУЧАК

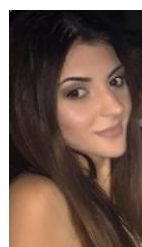
Један од кључних увида рада односи се на разумевање равнотеже интереса не као статичног стања, већ као динамичног процеса који захтева континуирану анализу и прилагођавање. У том контексту, теорија игара не нуди готова решења, већ алате за осветљавање суштинских аспеката конфликта и потенцијалних стратегија за његово разумевање и управљање. Такође, показано је да је равнотежа интереса концепт који није усмерен на проналажење “победника” или “губитника” већ на идентификацију начина на који се конфликт може моделирати, анализирати и потенцијално разрешити на начин који је заснован на објективној анализи међузависности међу учесницима.

Закључујемо да математички приступ као што је теорија игара, има велику вредност у систематичном разумевању равнотеже интереса. Међутим, примена захтева дубоко разумевање основних принципа, критичко сагледавање резултата и сталну рефлексiju о релевантности у реалним ситуацијама. Тиме се отвара простор за даљи развој методологија које ће омогућити свеобухватнију и прецизнију анализу комплексних међузависности и допринети бољем разумевању проблема изван оквира основних модела.

6. ЛИТЕРАТУРА

- [1] Павличић Д., Теорија одлучивања, Центар за издавачку делатност Економски факултет, Универзитет у Београду, 2014.
- [2] Крчевинац С., Чангаловић М., Ковачевић В., Мартић М., Вујошевић М., Операциона истраживања 2, Факултет организационих наука, Универзитет у Београду, 2010.
- [3] Петрић Ј., Операциона истраживања (књига друга), Издавачко – штампарско – књижарска радна организација, Београд, 1979.
- [4] Стојановић Б., Теорија игара: елементи и примена, Службени гласник, Београд, 2005.
- [5] Веселиновић Д., Основе теорије равнотеже интереса, Медитеран Издаваштво, Нови Сад, 2008.
- [6] Acemoglu, D., Ozdaglar, A., Opinion dynamics and learning in social networks. *Dynamic Games and Applications*, vol. 1, pp. 3-49, 2011.
- [7] Acemoglu, D., Restrepo, P., Artificial intelligence, automation, and work. *The economics of artificial intelligence: An agenda*, University of Chicago Press, pp. 197-236, 2018.
- [8] Sandholm, W. H., *Population Games and Evolutionary Dynamics*. MIT Press, 2010.

Кратка биографија



Мара Весић рођена 31. Маја 1993. године у Новом Саду. Дипломирала 2019. године на Природно-математичком факултету, смер Математика финансија, у Новом Саду. Наредне 2020. године уписала је мастер студије примењене математике на Факултету техничких наука.