

PRINUDNE OSCILACIJE VIBROUDARNOG SISTEMA
FORCED OSCILLATION OF VIBRO-IMPACT SYSTEM

Petar Tošić, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad

Oblast – MAŠINSTVO -Tehnička mehanika

Kratak sadržaj – U radu je analiziran vibroudarni sistem pobuđen kretanjem. Izvršena je analitička i numerička analiza slobodnih, prigušenih i prinudnih oscilacija. Prikazani su amplitudno frekventni dijagrami prinudnih oscilacija i izvršeno je poređenje analitičkog i numeričkog rešenja.

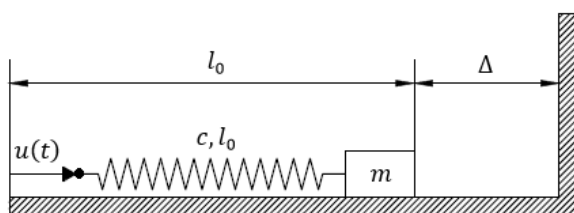
Ključne reči: oscilacije, udar, vibro udar

Abstract – In this paper are analysed forced oscillations of vibro-impact system. An analytical and numerical analysis of free, damped and forced oscillations was performed. Amplitude frequency diagrams of forced oscillations are presented and a comparison of the analytical and numerical solution was made.

Keywords: oscillations, impact, vibro-impact

1. UVOD

Tema ovog rada je analiza vibroudarnog sistema pobuđenog kretanjem. Sistem, prikazan na slici 1, sastoji se od lake linearne opruge, krutosti c i dužine l_0 u nenapregnutom stanju, na čijem se jednom kraju nalazi oscilator, mase m , koji može da klizi po horizontalnoj podlozi bez trenja, dok je drugom kraju opruge saopštena prinuda u vidu pomeranja $u(t)$. Prepreka kretanju, u vidu zida je postavljena sa desne strane sistema, na rastojanju Δ od ravnotežnog položaja oscilatora.



Slika 1

Ovakav model vibroudarnog sistema može da posluži u lakšem razumevanju rada široke klase vibroudarnih mašina [2],[3]. Razne mašine za bušenje, nabijanje, drobljenje i mlevenje, zabijanje rade na principu vibroudara. U ovom radu će biti analizirane slobodne oscilacije, biće ispitani slučajevi slobodnih oscilacija bez udara i slobodnih oscilacija sa udarom. Analiziraće se prinudne oscilacije, analitički i numerički, biće prikazan amplitudno frekventni dijagram i numerička rešenja diferencijalne jednačine kretanja za različite frekvencije prinude. Ispitaće se postojanje udar

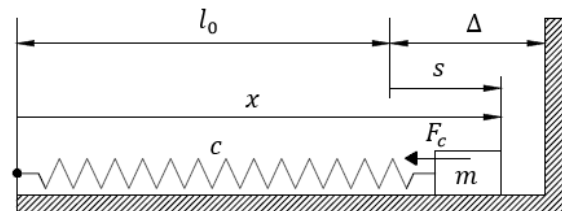
NAPOMENA:

Ovaj rad proistekao je iz master rada čiji mentor je bio dr Miodrag Zuković.

nih oscilacija u zavisnosti od brzina u trenutku udara i frekvencije prinude. Ispitaće se postojanje vibroudarnih oscilacija u zavisnosti od frekvencije oscilacija, analiziraće se amplitudno frekventni dijagram dobijen numeričkim putem, zajedno sa amplitudno frekventnim dijagramom slobodnih oscilacija.

2. SLOBODNE OSCILACIJE

Počecemo naša razmatranja sa proučavanjem slobodnih oscilacija sistema.



Slika 2

Na slici 2 predstavljen je dati sistem u napregnutom stanju, koji se sastoji od opruge krutosti c dužine l_0 na čijem se jednom kraju nalazi masa m , koja može da klizi po horizontalnoj podlozi bez trenja dok je drugi kraj opruge fiksiran. Rastojanje između mase m u ravnotežnom položaju i zida je označeno grčkim slovom Δ . U radu se razmatra samo slučaj $\Delta > 0$. Položaj tačke je u potpunosti okarakterisan generalisanom koordinatom x . U početnom trenutku položaj tačke je

$$x = l_0 + s \tag{1}$$

Uzeto je da je početna brzina oscilatora jednaka nuli

$$\dot{x}(0) = 0 \tag{2}$$

Slučaj bez udara se javlja kada je zadovoljen uslov

$$l_0 - \Delta < x_0 < l_0 + \Delta \tag{3}$$

Slučaj sa udarom javlja se kada je zadovoljen uslov

$$x_0 \leq l_0 - \Delta \tag{4}$$

Diferencijalna jednačina kretanja je data sa

$$m\ddot{x} = -F_c \tag{5}$$

Sa F_c je obeležena sila u linearnoj opruzi

$$F_c = c s \tag{6}$$

gde je s izduženje opruge.

Nakon uvođenja oznake $\omega^2 = \frac{c}{m}$, prethodna jednačina postaje

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \omega^2 l_0 \tag{7}$$

Rešenje prethodne jednačine može se zapisati u obliku

$$x(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) + l_0 \tag{8}$$

Gde cu C_1 i C_2 proizvoljne konstante koje se određuju uz pomoć početnih uslova

$$x(0) = x_0 = l_0 + s_0, \dot{x}(0) = 0 \quad (9)$$

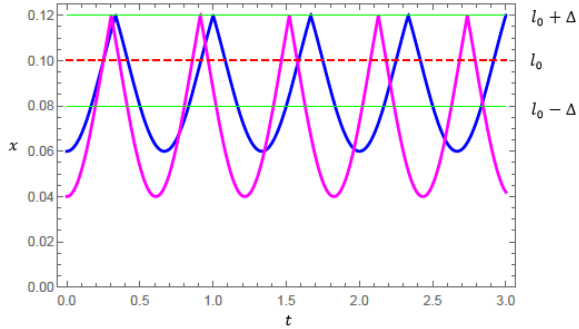
Ako se trenutak kada dolazi do udara obeleži sa t_u tada je položaj oscilatora u trenutku udara.

$$x(t_u) = l_0 + \Delta \quad (10)$$

Trenutak neposredno pre udara je označen sa t_u^- , a sa t_u^+ trenutak nakon udara. Veza između brzina u trenutku neposredno pre i nakon udara je data sa jednačinom

$$\dot{x}(t_u^+) = -k\dot{x}(t_u^-) \quad (11)$$

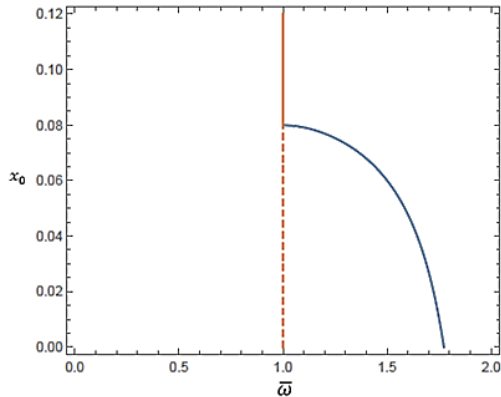
Rešena je diferencijalna jednačina (7) sa graničnim uslovima (9),(10),(11)



Slika 3. Oscilacije sa udarom rešenje za parametre

$l_0 = 0.1\text{m}$, $\Delta = 0.2\text{m}$, $\omega^2 = 2\pi \text{ s}^{-1}$, $k = 1$, $x_0 = 0.06\text{m}$ i $x_0 = 0.04\text{m}$.

Na slici 3 prikazane su slobodne oscilacije sa udarom. Može se primetiti da se period oscilacija menja sa promenom amplitude, što nije slučaj kod slobodnih oscilacija bez udara.



Slika 4. Zavisnost frekvencije od pomeranja „back bone curve”

Na slici 4 prikazana je zavisnost kružne frekvencije od x_0 . U slučaju bez udara frekvencija je konstantna, a u slučaju sa udarom frekvencija se menja sa promenom amplitude odnosno početnog položaja x_0 .

3. PRINUDNE OSCILACIJE

Uvodi se prinuda $u(t)$ u naš sistem tako što se kraj opruge koji je bio fiksiran (slika 2) periodično pomera po harmonijskom zakonu

$$u(t) = u_0 \cos(\Omega t) \quad (12)$$

gde je u_0 amplituda prinudnog pomeranja, a Ω frekvencija prinude. Uvodi se i otpor kretanju vazduha kao

$$F_b = b\dot{x} \quad (13)$$

Pa se diferencijalna jednačina kretanja između dva udara definiše kao

$$m\ddot{x} = -F_c - F_b \quad (14)$$

Gde je F_c

$$F_c = c s = c(x - l_0 - u(t)) \quad (15)$$

U jednačinu (14) su zamenjeni izrazi (12),(13),(15) nakon sređivanja dobija se

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2 x = \omega^2 l_0 + \omega^2 u_0 \cos(\Omega t) \quad (16)$$

Gde je $2\delta = \frac{b}{m}$, a $\omega^2 = \frac{c}{m}$. Ako se uvede smena

$$x = l_0 + y \rightarrow \dot{x} = \dot{y}, \quad \ddot{x} = \ddot{y} \quad (17)$$

Diferencijalna jednačina kretanja postaje

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega^2 y = \omega^2 u_0 \cos(\Omega t) \quad (18)$$

Opšte rešenje diferencijalne jednačine se dobija kao zbir opšteg rešenja homogene jednačine i partikularnog rešenja same jednačine $y = y_h + y_p$. Homogeno rešenje zbog prisustva prigušenja vremenom iščezava $\lim_{t \rightarrow \infty} y_h = 0$. Usvaja se da opšte rešenje sadrži samo partikularni deo dok se homogeni deo može zanemariti $\lim_{t \rightarrow \infty} y = y_p$.

Partikularno rešenje je oblika

$$y_p = A_1 \cos(\Omega t) + A_2 \sin(\Omega t) \quad (19)$$

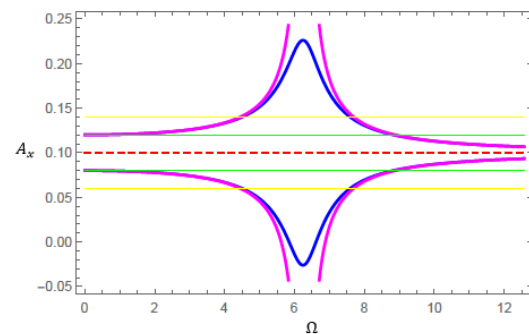
Konstante A_1 i A_2 se određuju tako što se pronađu odgovarajući izvodi partikularnog rešenja (19) i zamene se u diferencijalnu jednačinu (18). Preko konstanti A_1 i A_2 , dobija se jednačina za amplitudu prinudnih oscilacija.

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \sqrt{\frac{\omega^4 u_0^2}{4\delta^2 \Omega^2 + (\Omega^2 - \omega^2)^2}} \quad (20)$$

Ukoliko se u (20) zameni da je $\delta = 0$ dobija se jednačina za amplitudu oscilacija bez prigušenja

$$A = \sqrt{\frac{\omega^4 u_0^2}{(\Omega^2 - \omega^2)^2}} \quad (21)$$

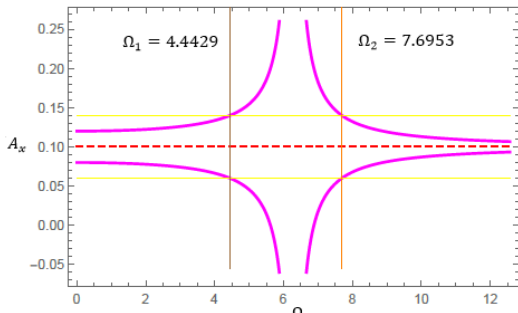
Zavisnost amplitude A_x ($A_x = l_0 \pm A$) od frekvencije Ω može se grafički predstaviti preko amplitudno frekventnog dijagrama slika 5.



Slika 5. Amplitudno frekventni dijagram

Na slici 5 su prikazane amplitudno frekventne karakteristike za prinudne oscilacije sa prigušenjem i bez prigušenja. Isprekidanom linijom na dijagramu je prikazan ravnotežni položaj oko kojeg se vrše oscilacije. Horizontalnim linijama je predstavljena prepreka, odnosno granice za postojanje udara. Kada je $\Omega \ll \omega$, tj. $\Omega \approx 0$ amplituda prinudnih oscilacija je približno jednaka u_0 , odnosno statičkom izduženju opruge usled pomeranja za vrednost u_0 . Kada je $\Omega = \omega = 2\pi \text{ s}^{-1}$ dolazi do rezonancije. U rezonantnoj oblasti amplituda prinudnih oscilacija bez prigušenja raste neograničeno, dok kod prinudnih oscilacija sa prigušenjem amplituda ima konačnu vrednost, koja zavisi od veličine prigušenja. Kada je $\Omega \gg \omega$, amplitude prinudnih oscilacija su vrlo male. Ovo osobina je važna u praksi jer ukazuje na

možnosti da se prinudne oscilacije i pored dejstva prinude odstrane. Odstranjivanje, eliminisanje prinudnih oscilacija naziva se vibraciona izolacija [1]. Iz jednačine (21) može se odrediti vrednost frekvencije prinude, pri kojoj je amplituda prinudnih oscilacija jednaka granici udara Δ .

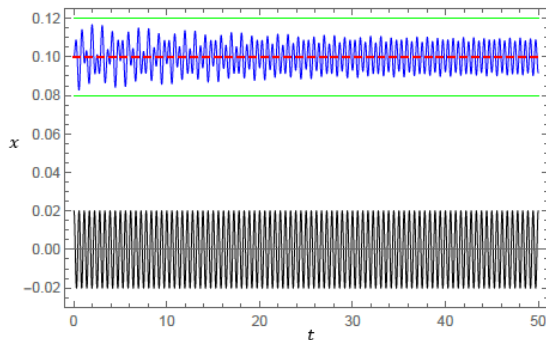


Slika 6. A/F dijagram i frekvencije prinude kada je $A = \Delta = 0.04\text{m}$ a $u_0 = 0.02\text{m}$ i $\omega = 2\pi \text{ s}^{-1}$.

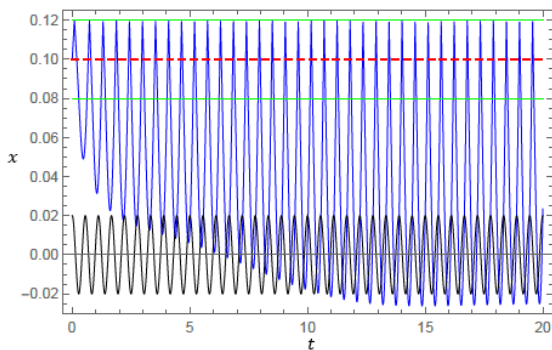
Diferencijalna jednačina kretanja (18), uz uslove udara

$$y(t_u) = \Delta, \dot{y}(t_u^+) = -k \dot{y}(t_u^-) \quad (22)$$

je rešena numerički za frekvenciju $\Omega = 1.8 \omega$.



Slika 7. Rešenje bez udara za parametre $\omega = 2\pi \text{ s}^{-1}$, $\delta = 0.5$, $k = 0.8$, $u_0 = 0.2\text{m}$, $l_0 = 0.1\text{m}$, $\Delta = 0.02\text{m}$, $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$



Slika 8. Rešenje sa udarom za parametre $\omega = 2\pi \text{ s}^{-1}$, $\delta = 0.5$, $k = 0.8$, $u_0 = 0.2\text{m}$, $l_0 = 0.1\text{m}$, $\Delta = 0.02\text{m}$, $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0.2$

Za istu frekvenciju prinude postoje dva rešenja, rešenje sa udarom i bez udara, zavisno od početnog uslova za brzinu.

4. ANALIZA PRINUDNIH OSCILACIJA SA UDAROM

U ovom delu je zanemarena sila otpora vazduha, $\delta = 0$. Diferencijalna jednačina kretanja (18) tada postaje

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \omega^2 u_0 \cos(\Omega t) \quad (23)$$

Ako se za početni trenutak izabere trenutak udara u zid t_u , tačnije trenutak neposredno nakon udara, a za krajnji, trenutak neposredno pre novog udara, $t_u + \frac{2\pi}{\Omega}$, granični uslovi se mogu zapisati kao

$$y(t_u) = \Delta, \quad y\left(t_u + \frac{2\pi}{\Omega}\right) = \Delta \quad (24)$$

$$\dot{y}\left(t_u + \frac{2\pi}{\Omega}\right) = v_u = v_u^-, \dot{y}(t_u) = -k v_u = v_u^+ \quad (25)$$

gde je sa $v_u^- = v_u$ obeležena brzina neposredno pre udara (brzina neposredno nakon udara je $v_u^+ = -k v_u$).

Opšte rešenje jednačine kretanja se sastoji iz homogenog i partikularnog dela

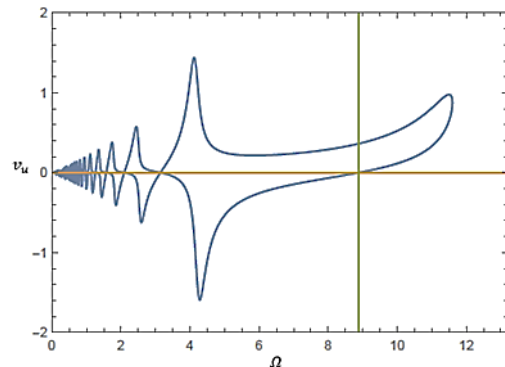
$$y(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) + A \cos(\Omega t) \quad (26)$$

Gde je

$$A = \frac{u_0 \omega^2}{\omega^2 - \Omega^2} \quad (27)$$

Iz izraza (24),(25),(26) rešavanjem i sređivanjem može se izvesti kvadratna jednačina za brzinu u trenutku udara.

$$v_u^2 \left(\frac{(-1+k)^2 (\Omega^2 - \omega^2)^2}{4u_0^2 \Omega^2 \omega^4} + \frac{(1+k)^2 (-\Omega^2 + \omega^2)^2 \cot\left(\frac{\pi\omega}{\Omega}\right)}{4u_0^2 \omega^6} \right) + v_u \left(\frac{(1+k)\Delta(-\Omega^2 + \omega^2)^2 \cot\left(\frac{\pi\omega}{\Omega}\right)}{u_0^2 \omega^5} \right) - 1 + \frac{\Delta^2 (-\Omega^2 + \omega^2)^2}{u_0^2 \omega^4} = 0 \quad (28)$$



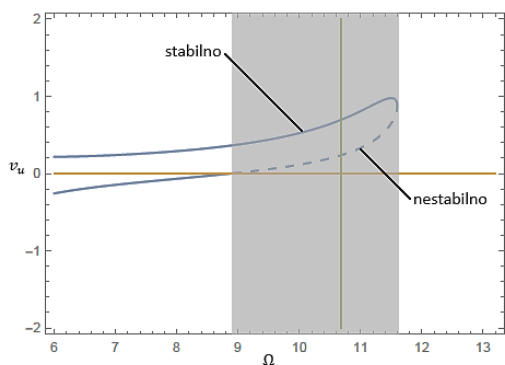
Slika 9. Brzine udara u zavisnosti od frekvencije ($\omega = 2\pi \text{ s}^{-1}$, $\Delta = 0.02\text{m}$, $k = 0.8$, $u_0 = 0.2\text{m}$)

Na slici 9 prikazana je brzina u trenutku udara v_u u zavisnosti od frekvencije Ω . Kvadratna jednačina za brzinu u trenutku udara ima u opštem slučaju dva rešenja. Negativna rešenja se neće razmatrati jer su fizički nemoguća. Vertikalnom linijom je predstavljena frekvencija za koju je brzina udara jednaka nuli i ona za podatke sa slike 9 iznosi $\Omega = \sqrt{2}\omega$.

Na delu dijagrama kada je $\Omega \ll \omega$ mogu se javiti oscilacije sa dva udara po periodu, oscilacije bez udara, kao i rešenja gde je teško definisati da li udar postoji te se ovaj deo neće razmatrati.

Pošto većina mašina radi u rezonantnom, a vrlo često i u postrezonantnom režimu za nas je zanimljivije da se ispitaju frekvencije u ovim oblastima.

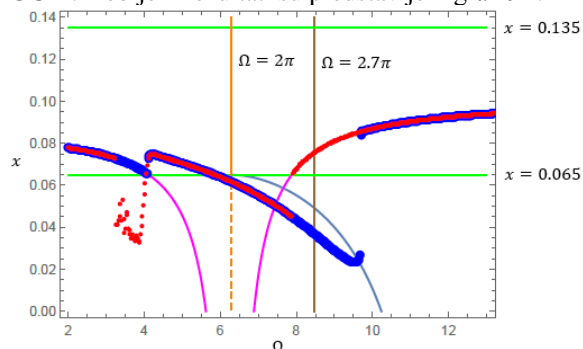
Detaljnijom analizom može se pokazati da u oblasti sa dva pozitivna rešenja sa udarom, osenčena oblast na slici 10, jedno rešenje – rešenje sa većom brzinom – je stabilno, dok je drugo – rešenje sa manjom brzinom – nestabilno.



Slika 10. Oblast sa dva pozitivna rešenja za brzinu udara

5. AMPLITUDNO-FREKVENTNI DIJAGRAM PRINUDNIH OSCILACIJA

U programskom paketu Wolfram Mathematica® numerički je rešena diferencijalna jednačina kretanja (18) sa uslovima (22), za vrednosti frekvencije u rasponu od $\Omega = 2 \text{ s}^{-1}$ do $\Omega = 14 \text{ s}^{-1}$. Počevši od $\Omega = 2 \text{ s}^{-1}$ povećavana je frekvencija za 0.025 s^{-1} . Za svaku vrednost Ω nađena je minimalna vrednost pomeranja tj. amplitude. Kao početni uslovi vrednosti za brzinu i pomeranje korišćeni su rezultati iz prethodne iteracije. Ponoviće se ista procedura numeričkog rešavanja jednačine kretanja, samo sada će se početi od najviše vrednosti za frekvenciju $\Omega = 14 \text{ s}^{-1}$. Frekvencija će se isto smanjivati za korak 0.025 s^{-1} . Dobijeni rezultati su predstavljeni grafički.



Slika 11. Amplitudno frekventni dijagram $k = 0.5$, $\delta = 0.05$, $\omega = 2\pi \text{ s}^{-1}$, $l_0 = 1\text{m}$, $\Delta = 0.035\text{m}$, $u_0 = 0.02\text{m}$

Na slici 11 su prikazani tačkasti dijagrami zavisnosti amplitude od frekvencije dobijeni numeričkim putem kao i „back-bone curve“ sa slike 4 i amplitudno frekventni dijagram za oscilacije sa prinudom bez prigušenja sa slike 5. Plavim većim tačkicama je prikazana zavisnost amplitude od frekvencije, dobijena povećavanjem frekvencije korakom od 0.025 s^{-1} , počevši od $\Omega = 2 \text{ s}^{-1}$. Crvenim manjim tačkicama je prikazana zavisnost amplitude od frekvencije, dobijena smanjivanjem frekvencije korakom od 0.025 s^{-1} , počevši od $\Omega = 14 \text{ s}^{-1}$. Numerički rezultati su približni kada postoji udarno rešenje i dobro prate krivu („back-bone curve“) amplitudno frekventnog dijagrama za oscilacije bez prinude. U prerezonantnoj oblasti dolazi do prekida numerički dobijene amplitudno frekventne krive.

Numerički dobijene vrednosti za amplitudu na mestu prekida sugerisu da u ovoj oblasti postoji udarno rešenje. Ukoliko se prikažu oscilacije za neku frekvenciju iz ove oblasti može se videti da postoje oscilacije sa udarom, međutim između dva udara postoji i neudarni „pik“. Ova oblast nije pogodna za izbor frekvencija pri projektovanju vibroudarnih mašina.

6. ZAKLJUČAK

U radu su analizirane prinudne oscilacije vibroudarnog sistema. U prvom delu rada ispitane su slobodne oscilacije, postavljen je uslov za postojanje udara, i analizirane su oscilacije bez udara, i oscilacije kada se udar javlja. Prikazana je zavisnost pomeranja (amplitude) od frekvencije „back-bone curve“ za oscilacije bez prinude. U nastavku su ispitane prinudne oscilacije. Prikazan je amplitudno frekventni dijagram prinudnih oscilacija sa prigušenjem i bez prigušenja.

Rešena je diferencijalna jednačina prinudnih oscilacija sa uslovima za postojanje udara za različite vrednosti frekvencije prinude. Za istu frekvenciju prinude dobijeno je rešenje bez udara i rešenje sa udarom u zavisnosti od početnih uslova. Izračunata je brzina u trenutku udara u zavisnosti od frekvencije. Kada postoje dva pozitivna rešenja za brzinu udara, jedno rešenje – rešenje sa većom brzinom – je stabilno, dok je drugo – rešenje sa manjom brzinom – nestabilno.

U petom delu je sprovedena numerička analiza, dobijen je amplitudno frekventni dijagram prinudnih oscilacija sa udarom. Kada postoji udar, numerički rezultati dobro prate „back-bone curve“ slobodnih oscilacije bez prinude. Pri izboru radne frekvencije, treba biti oprezan, jer se može desiti da se u želji da amplituda udara bude što veća, radna frekvencija odabere previše blizu oblasti u kojoj dolazi do prelaska udarnog u neudarno rešenje.

7. LITERATURA

- [1] Božidar D. Vujanović, Teorija oscilacija, Fakultet tehničkih nauka Novi Sadu, STYLOS, Novi Sad, 1995.
- [2] V. I. Babitsky, Theory of Vibro-Impact Systems and Applications, Foundations of Engineering Mechanics, Springer, 1998, ISBN 978-3-662-22534-9
- [3] Yang Liu, Marian Wiercigroch, Ekaterina Pavlovskaja, Hongnian Yu, Modelling of a vibro-impact capsule system, International Journal of Mechanical Sciences, Volume 66, 2013, Pages 2-11, ISSN 0020-7403

Kratka biografija:



Petar Tošić rođen je u Sremskoj Mitrovici 1991. god. Master rad na Fakultetu tehničkih nauka iz oblasti Mašinstvo – Tehnička mehanika i dizajn u tehnici odbranio je 2018.god.

kontakt: tosic.pera91@gmail.com